أحمد فيزازي

(أستاذ مساعد مكلف بالدروس)

أخي المسلم أختي المسلمة
ساهم في نشر هذا الكتاب
لعل الله يرجع لهذه الأمة
سابق عهدها

دفـــــتـــــر

مـــيـــكـــانـــيـــك الـــنـــقـــطـــة الـــمـــاديـــة

LMD / PHYSIQUE-1-/ لـــ.مـــ.د

(الطبعة العربية)

دروس مبسّطة

100 تمرين محلول

(النصوص باللغتين العربية و الفرنسية)

معجم للمصطلحات العلمية

(عربي–فرنسي، فرنسي–عربي)

موجه لطلبة السنة أولى من التعليم العالي

لـــ.مـــ.د

علم المادة و العلوم التكنولوجية

القواعد الرئيسية للاشتقاق
Formules de dérivation

1/ أهم القواعد لحساب المشتقات.

إذا كان c ثابت و $u=\varphi(x)$ ، $v=\psi(x)$ دالتان لها مشتقات فإن:

$$1/(c)'=0 \qquad 2/(x)'=1 \qquad 3/(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$4/(cu)'=cu' \qquad 5/(uv)'=u'v+v'u \qquad 6/\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-v'u}{v^2}$$

$$7/\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{-cv}{v^2}$$

2/ جدول مشتقات الدوال الرئيسية.

$$1/\left(x^n\right)'=nx^{n-1} \qquad 2/\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad 3/(\sin x)'=\cos x$$

$$4/\ (\cos x)'=-\sin x \qquad 5/\ (tx)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad 6/\ (ctgx)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$7/(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (|x|\prec 1) \qquad 8/\ (\arccos xx)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (|x|\prec 1)$$

$$9/\ (arctgx)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad 10/\ (arcctgx)'=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$11/\ \left(a^x\right)'=a^x\ln x \qquad 12/\ \left(e^x\right)'=e^x$$

$$13/\ (\ln x)'=\frac{1}{x}\quad (x\succ 0) \qquad 14/\ (\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}\quad (x\succ 0, a\succ 0)$$

$$15/\ (shx)'=chx \qquad 16/\ (chx)'=shx$$

$$17/\ (thx)'=\frac{1}{ch^2 x} \qquad 18/\ (cthx)'=\frac{-1}{sh^2 x}$$

$$19/\ (Arshx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad 20/\ (Archx)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad (|x|\succ 1)$$

$$21/\ (Arthx)'=\frac{1}{1-x^2}\quad (|x|\prec 1) \qquad 22/\ (Arcthx)'=\frac{-1}{x^2-1}\quad (|x|\succ 1)$$

3/ قواعد اشتقاق الدوال المركبة.

إذا كان $y=f(u)$ و $u=\varphi(x)$ أي $y=f\left[\varphi(x)\right]$ و حيث y و u لهما مشتقات ،
فإن:

$$y'_x = y'_u u'_x$$ أو باستعمال رمز ليبنيتز $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

القواعد الرئيسية للتكامل

Formules d’intégration

1/ أهم قواعد التكامل.

ا/ إذا كان $F^{'}(x)=f(x)$ فإن: $\int f(x)dx=F(x)+C$ حيث C ثابت عشوائي.

ب/ $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$ حيث A ثابت.

ج/ $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$

د/ إذا كان $\int f(x)dx=F(x)+C$ و $u=\varphi(x)$ فإن $\int f(u)du=F(u)+C$

و بالخصوص، $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ علما أن $(a\neq 0)$

2/ جدول تكاملات نموذجية.

$I/\ \int x^n dx=\frac{x^{n-1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$

$II/\ \int\frac{dx}{x}=\ln|x|$

$III/\ \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a}+C\quad(a\neq 0)$

$V/\ \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$

$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{a-x}\right|+C\quad(a\neq 0)$

$VI/\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$

$VI/\ \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{-x}{a}+C\quad(a\succ 0)$

$VII/\ \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad(a\succ 0)\ ;\ \int e^x dx=e^x+C$

$VIII/\ \int sinxdx=-cosx+C$

$IX/\ \int cosxdx=\sin x+C$

$XIII/\ \int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln|tgx+\sec x|+C$

$XIV/\ \int shxdx=chx+C$

$$XV / \int chxdx = shx + C$$

$$XVI / \int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C$$

$$XVII / \int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$$

3/ طريقة الاستبدال.

ا/ استبدال المتغير في تكامل غير محدد:

نضع $x = \varphi(t)$ حيث t متغير جديد و φ دالة مستمرة قابلة للاشتقاق ، يكون:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

نحرص على اختيار الدالة φ بحيث يكون للطرف الثاني في العبارة (1) شكل بسيط التكامل.

ب/ الاستبدال المثلثي:

☜إذا كان التكامل يحتوي على الجذر $\sqrt{a^2 - x^2}$ ، نضع عموما $x = a\sin t$ و منه $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$.

☜إذا كان التكامل يحتوي على الجذر $\sqrt{x^2 - a^2}$ ، نضع عموما $x = a\sec t$ و منه $\sqrt{x^2 - a^2} = atgt$.

☜إذا كان التكامل يحتوي على الجذر $\sqrt{x^2 + a^2}$ ، نضع عموما $x = atgt$ و منه $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec t$

4/ التكامل بالأجزاء:

إذا كانت $u = \varphi(x)$ و $v = \psi(x)$ دالتان قابلتين للاشتقاق يكون :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

بعض المعادلات التفاضلية

Quelques équations différentielles

لتكن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية: $\boxed{y''+ay'+by=c}$ ، a ، b و c ثوابت.

الحالة الأولى: $\boxed{a=0,c=0\Rightarrow y''+by=0}$

إذا كانت $b=0$ الحل هو: $y=C_1x+C_2$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل تحدّدهما الشروط الإبتدائية.

إذا كانت $b\succ 0$ الحل هو: $y=C_1\sin\sqrt{b}x+C_2\cos\sqrt{b}x$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

إذا كانت $b\prec 0$ الحل هو: $y=C_1\exp\left(\sqrt{b}x\right)+C_2\exp\left(-\sqrt{b}x\right)$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

الحالة الثانية: $\boxed{a\neq 0,c=0\Rightarrow y''+ay'+by=0}$

المعادلة المميزة هي $r^2+ar+b=0$ ، مميزها: $\Delta=a^2-4b$ و جذراه ${}_1$ و ${}_2$:

إذا كان $\Delta\succ 0$ فإن الحل هو: $y=C_1\exp(r_1x)+C_2\exp(r_2x)$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

إذا كان $\Delta=0$ فإن $r_1=r_2=r_0$ و الحل هو: $y=(C_1x+C_2)\exp(r_0x)$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

إذا كان $\Delta\prec 0$ فإن $r_{1,2}$ عددان خياليان $r_{1,2}=\alpha+i\beta$ و الحل هو: $y=\exp(\alpha x)\left[C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right]$ ، C_1 و C_2 ثابتا التفاضل.

الحالة الثالثة: $\boxed{y''=0,c=0\Rightarrow ay'+by=0}$ تصبح المعادلة من الدرجة الأولى و الحل هو: $y=C\exp\left(-\frac{b}{a}x\right)$ ، C ثابت التفاضل تحدّده الشروط الإبتدائية.

الحالة الرابعة: $\boxed{y''=0\Rightarrow ay'+by=c}$

تصبح المعادلة من الدرجة الأولى و الحل هو: $y = C\exp\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + \frac{c}{b}$ ، C ثابت التفاضل تحدّده الشروط الإبتدائية.

الحالة الخامسة: $\boxed{y' = 0 \Rightarrow y'' + by = c}$ ، الحل هو:

$$y = C_1\exp\left(\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + C_2\exp\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + \frac{c}{b}$$

مـــــلـــــحـــــق

هذا الملحق يلخص التدرج، التباعد، الدوران و لابلاسيان في مختلف الإحداثيات: الكارتيزية، الأسطوانية و الكروية.

لتكن:

F **: دالة سلمية**

$\vec{V}$ **: دالة شعاعية**

تدرج دالة سلمية في الإحداثيات:

الكارتيزية: $F = F(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right]$$

الأسطوانية: $F = F(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right]$$

الكروية: $F = F(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{grad}F = \vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}\right]$$

تدرج دالة شعاعية في الإحداثيات:

الكارتيزية: $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z)$ ، $V_x = V_x(x,y,z), V_y = V_y(x,y,z), V_z = V_z(x,y,z)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

الأسطوانية: $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,z)$ ، $V_r = V_r(r,\theta,z), V_\theta = V_\theta(r,\theta,z), V_z = V_z(r,\theta,z)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(V_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

الكروية: $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,\varphi)$ ، $V_r = V_r(r,\theta,\varphi), V_\theta = V_\theta(r,\theta,\varphi), V_\varphi = V_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}\left[\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r}V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cos\theta.V_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

دوران دالة شعاعية في الإحداثيات:

الكارتيزية: $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z)$ ، $V_x = V_x(x,y,z), V_y = V_y(x,y,z), V_z = V_z(x,y,z)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}\left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

الأسطوانية: $\vec{V}=\vec{V}(r,\theta,z)$ ، $V_r=V_r(r,\theta,z),V_\theta=V_\theta(r,\theta,z),V_z=V_z(r,\theta,z)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\left[\frac{\left(\frac{\partial V_z}{\partial\theta}-r\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)}{r}\overrightarrow{u_r}+\left(\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta}+\frac{V_\theta+r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}}{r}\overrightarrow{u_z}\right]$$

الكروية: $\vec{V}=\vec{V}(r,\theta,\varphi)$ ، $V_r=V_r(r,\theta,\varphi),V_\theta=V_\theta(r,\theta,\varphi),V_\varphi=V_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\left[\frac{r\cos\theta.V_\varphi+r\sin\theta\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial\theta}\right)-r\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)}{r^2\sin\theta}\overrightarrow{u_r}+\right.$$

$$\left.\frac{\left(\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right)-\sin\theta V_\varphi-r\sin\theta\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\right)}{r\sin\theta}\overrightarrow{u_\theta}+\frac{V_\theta+r\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)}{r}\overrightarrow{u_\varphi}\right]$$

<u>لابلاسيان دالة سلمية في الإحداثيات:</u>

الكارتيزية: $F=F(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F)=\vec{\nabla}^2(F)=\left[\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}\right]$$

الأسطوانية: $F=F(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F)=\vec{\nabla}^2(F)=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}$$

الكروية: $F=F(r,\theta,\varphi)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F)=\vec{\nabla}^2(F)=\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cos\theta.\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}$$

<u>لابلاسيان دالة شاعية في الإحداثيات:</u>

الكارتيزية: $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z)$ ، $V_x=V_x(x,y,z),V_y=V_y(x,y,z),V_z=V_z(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2\left(\vec{V}\right)=\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\vec{j}+$$
$$\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

الأسطوانية: $\vec{V}=\vec{V}\left(r,\theta,z\right)$ ، $V_r=V_r\left(r,\theta,z\right),V_\theta=V_\theta\left(r,\theta,z\right),V_z=V_z\left(r,\theta,z\right)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}=\vec{\nabla}^2.\vec{V}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_r$$
$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_\theta$$
$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_z$$

الكروية: $\vec{V}=\vec{V}\left(r,\theta,\varphi\right)$ ، $V_r=V_r\left(r,\theta,\varphi\right),V_\theta=V_\theta\left(r,\theta,\varphi\right),V_\varphi=V_\varphi\left(r,\theta,\varphi\right)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2(\vec{V})=\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_r$$
$$+\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_\theta$$
$$+\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_\varphi$$

تدرج شعاع (مصفوفة3*3):

$\vec{V}=\vec{V}\left(x,y,z\right)$ ، $V_x=V_x\left(x,y,z\right),V_y=V_y\left(x,y,z\right),V_z=V_z\left(x,y,z\right)$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z}\\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z}\\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z}\end{bmatrix}$$

I.تـــذكـــيـــرات ريـــاضـــيـة
RAPPELS MATHEMATIQUES

A-I /الـــتـــحـــلـــيـــل الـــبـــعـــدي
ANALYSE DIMENSIONNELLE

1/الـــوحـــدات

ا/ **الوحدات الأساسية**: تتكون الجملة الدولية للوحدات من 7 وحدات أساسية مناسبة لـــ 7 مقادير فيزيائية كما يبينه الجدول التالي:

المقدار	الكتلة	الطول	الزمن	الشدة الكهربائية	درجة الحرارة	كمية المادة	الشدة الضوئية
رمز المقدار	**M**	**L**	**T**	**I**	**θ**	**N**	**J**
إسم الوحدة	kilogramme كيلوغرام	mètre متر	seconde ثانية	ampère آمبير	degré kelvin درجة كلفينية	mole مول	candela قنديلة
رمز الوحدة	**kg**	**m**	**s**	**A**	**K**	**mol**	**Cd**

ب/ **الوحدات المشتقة**: (unités dérivées) تشتق وحدات كل المقادير الفيزيائية (عدا السبعة المذكورة أعلاه) من الوحدات الأساسية السبعة السابقة الذكر.

مثلا: النيوتن، الجول (J)، الأوم (Ω).............

ج/ **الوحدات الثانوية**: (unités secondaires) إلى جانب الوحدات الأساسية توجد وحدات ثانوية لبعض المقادير.

مثلا: لتر (l)، الدرجة المئوية $(°C)$ الحريرة (cal).........

د/ **وحدة إضافية**: (unité supplémentaire) الوحدة الرسمية للزوايا المستوية هي الراديان (rad).

ه/**المضاعفات و الأجزاء**: (multiples et sous multiples)

☜ **الأجزاء**:

المعامل	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
السابقة	déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto	atto
الرمز	d	c	m	µ	n	p	f	a

☜ **المضاعفات:**

المعامل	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}
السابقة	déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta	exa
الرمز	da	h	k	M	G	T	P	E

2/ المعادلات ذات الأبعاد:

ا/ تعريف:

في الإطار المحدود للميكانيك، نسمي ***المعادلة ذات الأبعاد*** (équation aux dimensions) *للمقدار* (grandeur) (G)، المعادلة أحادية الحد لهذا المقدار و التي تكون على الشكل:

$$[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} \qquad (1.1)$$

حيث T, L , M ترمز على التوالي إلى المقادير: الكتلة(masse)، الطول(longueur) و الزمن(temps) .

ب/ ما فائدة هذه العبارة؟

الفائدة من هذه العبارة هي أساسا الوصول إلى عبارة وحدة(unité) (G) في الجملة الدولية للوحدات (Système International des Unités : S.I) و التي ستكون:

$$kg^{\alpha} m^{\beta} s^{\gamma} \qquad (2.1)$$

نبين في الأمثلة التالية الكيفية الواجب إتباعها للبحث عن معادلات ذات الأبعاد لبعض المقادير.

ج/ كيف نحدد α,β,γ؟

عملية تحديد الأعداد الحقيقية γ,β,α تسمى **بالتحليل البعدي** للمقدار G .
لبلوغ هذا الهدف نعبر عن علاقات التعاريف أو كل عبارة معلومة توصلت إليها الدراسة النظرية إنطاقا من تلك التعاريف.

أمثلة:

مثال 1.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد للسرعة (vitesse) و التسارع (accélération) .

السرعة: $[V] = LT^{-1} \leftarrow [V] = \dfrac{L}{T} \leftarrow V = \dfrac{x}{t}$ الوحدة: ms^{-1}

التسارع: $[a] = L.T^{-2} \leftarrow [a] = \dfrac{L.T^{-1}}{T} \leftarrow a = \dfrac{v}{t}$ الوحدة: $m.s^{-2}$

مثال2.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد للقوة(force) و العمل (travail).

الوحدة: $N = kms^{-2}$ $\quad F = ma \rightarrow [F] = [m].[a] \rightarrow [F] = MLT^{-2}$

الوحدة: $kgm^2s^{-2} = N.m = J$ $\quad W = F.l \rightarrow [W] = MLT^{-2}.L \rightarrow [W] = ML^2T^{-2}$

مثال3.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد لسعة مكثفة (capacité d'un condensateur) .

في هذه الحالة خرجنا من إطار الميكانيك. يجب تمديد القاعدة المذكورة أعلاه.

في الكهرومغناطيسية ندخل قاعدة ذات 4 أبعاد و ذلك بإضافة المقدار الأساسي للشدة (intensité) و الذي نرمز إليه بـــ I.

تصبح المعادلة ذات الأبعاد:

$$[G] = M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}I^{\delta} \qquad (3.1)$$

الجواب:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad [C] = \frac{[Q]}{[V]}$$

$$Q = It \qquad [Q] = I.T$$

$$W = Q.V \Rightarrow [V] = \frac{[W]}{[Q]} \Rightarrow [V] = \frac{ML^2T^{-2}}{IT}$$

$$[W] = ML^2T^{-2}$$

الوحدة: $kg^{-1}m^{-2}s^4A^2 = F(farad)$ $\quad [C] = \dfrac{IT}{\dfrac{ML^2T^{-2}}{IT}} \Rightarrow [C] = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$

مثال 4.1:

عين المعادلة ذات الأبعاد للسماحية (permittivité) ε لمكثفة. هل يمكن التعبير عنها بـــ $N^{-1}m^{-2}C^{+2}$ ؟

الجواب:

نعرف أن : $C = \varepsilon\frac{S}{d} \Rightarrow [\varepsilon] = [C]L^{-1}$

رأينا أن: $[C] = I^2M^{-1}L^{-2}T^4$

و عليه فإن: $[\varepsilon] = I^2M^{-1}L^{-3}T^4$

نحلل العبارة إلى 3 أجزاء:

$$[\varepsilon] = (I^2T^2)(M^{-1}L^{-1}T^2)(L^{-2})$$

$$[Q]^2 = I^2T^2 \rightarrow C^2 \quad ; \quad [F]^{-1} = M^{-1}L^{-1}T^2 \rightarrow N^{-1} \quad ;$$

$$[L]^{-2} \rightarrow m^{-2} \quad \Rightarrow \boxed{\varepsilon \rightarrow C^2N^{-1}m^{-2}}$$

د/ تعميم:

في الحالة العامة فإن المعادلة ذات الأبعاد للمقدار G تكون على الشكل:

$$\boxed{[G] = M^aL^bT^cI^d\theta^eN^fJ^g} \qquad (4.1)$$

θ : رمز لدرجة الحرارة (température)

N : رمز لكمية المادة (quantité de matière)

J : رمز للشدة الضوئية (intensité lumineuse)

ملاحظة: بعد الدوال الأسية و اللوغاريتمية و المثلثية و الثوابت و ما داخل هذه الدوال يساوي 1.

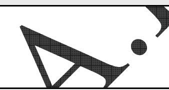
$$[x]=1 \quad [\alpha]=1 \quad [\sin\alpha]=1 \quad [e^x]=1 \quad [\log x]=1 \quad [8]=1 \quad [\pi]=1$$

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 1.1	تمرين 1.1
Relever les erreurs qui se sont glissées dans les colonnes des dimensions et des unités dans le tableau suivant :	إكتشف الأخطاء الواردة في عمودي الأبعاد و الوحدات في الجدول التالي:

الوحدة Unité	البعد Dimension	العلاقة لتحديد معادلة الأبعاد Relation pour le calcul de l'équation aux dimensions	المقدار Grandeur
$Kg.m.s^{-2} = N$ نيوتن	MLT^{-2}	$F = ma$	Force F القوة
$Kg.m^2.s^{-2} = J$ جول	ML^2T^{-2}	$W = F.l.\cos\alpha$	Travail W العمل
$Kg.m^2.s^3 = W$ واط	ML^2T^{-3}	$P = \dfrac{W}{t}$	Puissance P الإستطاعة
$Kg.m^{-1}.s^{-2} = Pa$ باسكال	$ML^{-1}T^{-2}$	$p = \dfrac{F}{S}$	Pression p الضغط
$Kg.m^2.s^{-2}.A^{-1} = V$ فولط	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	$W = Q.V$	Potentiel V الكمون
$Kg^{-1}.m^{-2}s^4.A^2 = F$ فاراد	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	$W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$	Capacité condensateur C سعة مكثفة
$Kg.m^2.s^{-3}.A^{-2} = \Omega$ أوم	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	$P = R.I^2$	Résistance R المقاومة
$Kg.m.s^{-2}A^{-1} = V/m$ فولط\متر	$MLT^{-2}I^{-1}$	$E = \dfrac{V}{d}$	Champ électrique E الحقل الكهربائي
$Kg.s^2.A^{-1} = T$ تيسلا	$MT^{-2}I^{-1}$	$\vec{F} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$	B التحريض المغناطيسي Induction Magnétique

Exercice1.2	التمرين2.1
Le module de la tension d'un ressort s'exprime par $T = k.x$ .Trouver la dimension de la constante de raideur k.	تحسب شدة توتر نابض بالعبارة $T = k.x$.أوجد بعد ثابت المرونة k.



Exercice1.3 :	التمرين3.1
Déterminer les dimensions des grandeurs physiques suivantes : a/ La constante universelle de gravitation G figurant dans l'expression de la force de gravitation universelle $F = G\dfrac{mm'}{d^2}$, sachant que m et m' sont des masses et d une distance. b/ La permittivité du vide ε_0 figurant dans l'expression du champ électrique $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\dfrac{q}{r^2}$.	عين أبعاد المقادير الفيزيائية التالية: ا/ الثابت العام للجاذبية G الوارد في عبارة قوة الجذب العام $F = G\dfrac{mm'}{d^2}$ ، علما أن m و m' كتلتان و d مسافة. ب/ سماحية الفراغ ε_0 الواردة في عبارة الحقل الكهربائي $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\dfrac{q}{r^2}$.

q :une charge électrique et une distance.

c/la permittivité magnétique μ_0 figurant dans l'expression du champ d'induction magnétique produit par un courant rectiligne I de longueur infinie : $B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi b}$; b :une distance .

d/ Montrer que la dimension de $\left(\mu_0 . \varepsilon_0\right)^{-1/2}$ est homogène avec la dimension de la vitesse.

q:شحنة كهربائية، :مسافة.

ج/ النفاذية المغناطيسية μ_0 الموجودة في عبارة حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي مستقيم I لا متناهي الطول: $B = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi b}$ ؛ b:مسافة.

د/ برهن أن بعد $\left(\mu_0 . \varepsilon_0\right)^{-1/2}$ متجانس مع بعد السرعة.

Exercice1.4

Calculer la dimension de la densité d'un courant électrique définie par $J = \dfrac{l.E}{S.R}$, où l est une distance, S une surface, R une résistance et E un champ électrique.

التمرين4.1

أحسب بعد كثافة التيار الكهربائي المعرفة بالعلاقة $J = \dfrac{l.E}{S.R}$ حيث l مسافة، S مساحة، R مقاومة و E حقل كهربائي.

Exercice1.5

L'équation d'un gaz parfait s'écrit $\left(p + \dfrac{a}{V_0}\right)\left(V_0 - b\right) = RT$, avec p la pression du gaz, V_0 le volume molaire et T la température.

Déterminer les dimension des constantes physiques R, b, a .

التمرين5.1

تكتب معادلة غاز حقيقي على الشكل التالي: $\left(p + \dfrac{a}{V_0}\right)\left(V_0 - b\right) = RT$ ، علما أن p هو ضغط الغاز ، V_0 حجمه المولي و Tهي درجة الحرارة.

عين أبعاد الثوابت الفيزيائية R, b, a .



Exercice1.6

Montrer que les diverses expressions de l'énergie, données ci-dessous, ont toutes pour dimension $\left[E\right] = ML^2T^{-2}$.

Energie cinétique en mécanique newtonienne :

$E_c = \dfrac{1}{2} mv^2$,

Energie totale en mécanique relativiste : $E = mc^2$, c étant la vitesse de propagation de la lumière,

Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

$E = -\dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$, h étant la constante de Planck dont la dimension est L^2MT^{-1} , n nombre sans dimension,

Energie libérée par effet Joule : $W = RI^2t$.

التمرين6.1

بالاستعانة ببعض النتائج السابقة بين أن مختلف العبارات للطاقة، المعطاة أسفله، لها البعد: $\left[E\right] = ML^2T^{-2}$.

الطاقة الحركية في الميكانيك النيوتني:

$E_c = \dfrac{1}{2} mv^2$ ،

الطاقة الكلية في الميكانيك النسبي: $E = mc^2$ ، c هي سرعة انتشار الضوء.

مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين:

$E = -\dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$ ، h ثابت بلانك بعده L^2MT^{-1} ، و nعدد بدون بعد،

الطاقة المحررة بفعل جول: $W = RI^2t$

Corrigés des exercices 1.1 à 1.6 : حلول التمارين من 1.1 إلى 6.1

التمرين1.1:

يوجد الخطأ الأول في السطر السادس: $[V]=ML^2T^{-2}I^{-1}$ و الوحدة $V \to Kg.m^2.s^{-2}.A^{-1}=V$

يوجد الخطأ الثاني في السطر التاسع: $[E]=MLT^{-2}I^{-1}$ و الوحدة $E \to Kg.m.s^{-2}A^{-1}=V/m$

تنبيه: في كل التمارين المتبقية سنعتمد على النتائج الواردة في جدول التمرين 1.1 بعد تصحيح الخطأين كما ورد في تصحيح التمرين1.1

التمرين2.1:

بعد ثابت مرونة النابض: $\boxed{[k]=MT^{-2}}$; $T=kx \Rightarrow k=\dfrac{T}{x}$; $[\mathrm{k}]=\dfrac{[T]}{[x]} \Rightarrow [k]=\dfrac{MLT^{-2}}{L}$

التمرين3.1 :

بعد ثابت الجذب العام:

ا/ $G=\dfrac{Fd^2}{mm'} \Rightarrow [G]=\dfrac{[F][d^2]}{[m][m']}=\dfrac{MLT^{-2}L^2}{M^2}$; $\boxed{[\mathrm{G}]=M^{-1}L^3T^{-2}}$

بعد سماحية الفراغ:

ب/ $\varepsilon_0=\dfrac{q}{4\pi r^2E} \Rightarrow [\varepsilon_0]=\dfrac{[q]}{[E][r^2]}=\dfrac{IT}{MLT^{-3}I^{-1}.L^2}$; $\boxed{[\varepsilon_0]=M^{-1}L^{-3}T^{+4}I^2}$

بعد النفاذية المغناطيسية:

ج/ $\mu_0=\dfrac{B.2\pi b}{I} \Rightarrow [\mu]=\dfrac{[B][b]}{[I]}=\dfrac{MT^{-2}I^{-1}L}{I}$; $\boxed{[\mu_0]=M^{-1}LT^{-2}I^{-2}}$

د/ بعد الجداء $(\mu_0.\varepsilon_0)^{-1/2}$:

$[\mu_0\varepsilon_0]=[\mu_0][\varepsilon_0]=(MT^{-2}I^{-2}L).(M^{-1}L^{-3}T^{+4}I^2) \Rightarrow [\mu_0\varepsilon_0]=T^2L^{-2}$; $\boxed{[\mu_0\varepsilon_0]^{-1/2}=TL^{-1}=[v]}$

التمرين4.1 :

بعد كثافة التيار الكهربائي:

$J=\dfrac{lE}{SR} \Rightarrow [J]=\dfrac{[l][E]}{[S][R]}=\dfrac{L.MLT^{-3}I^{-1}}{L.ML^2T^{-3}I^{-2}}$; $\boxed{[\mathrm{J}]=L^{-2}I}$ $\boxed{\mathrm{J} \to \mathrm{A/m^2}=A.m^{-2}}$

التمرين5.1 :

نلاحظ أن المقدار $\dfrac{a}{V_0}$ يمثل ضغطا و بالتالي فإن: $\left[\dfrac{a}{V_0}\right]=[p]=\dfrac{[F]}{[S]}=ML^{-1}T^{-2}$

و منه فإن : $[a]=[p][V_0]=ML^{-1}T^{-2}.L^{+3} \Rightarrow \boxed{[a]=ML^{+2}T^{-2}}$

أما b فلا يمكن أن يكون إلا حجما و عليه : $\boxed{[b]=[V_0]=L^{+3}}$

و تبعا لكل ما سبق فإن المقدار RT يمثل ضغطا و منه فإن:

$$[RT] = [P][V] = ML^{+2}T^{-2} \Rightarrow \boxed{[R] = ML^{+2}T^{-2}K^{-1}}$$

التمرين 6.1:

$$[E_c] = [m]\left[v^2\right] = M.L^2T^{-2}$$

$$[E] = [m]\left[c^2\right] = M.L^2T^{-2}$$

$$[E] = \frac{\left[m_0 e^4\right]}{\left[\varepsilon_0^2\right]\left[h^2\right]} = \frac{M.(IT)^4}{\left(M^{-1}L^{-3}T^4I^2\right)^2\left(L^2MT^{-1}\right)^2} = M.L^2T^{-2}$$

$$[W] = [R]\left[I^2\right][t] = \left(ML^2T^{-3}I^{-2}\right)\left(I^2\right)(T) = M.L^2T^{-2}$$

B-I/ حـــســـاب الارتـــيـــابـــات
CALCUL DES INCERTITUDES

1/ المقدار الفيزيائي (grandeur physique):

المقدار الفيزيائي هو كل من يأخذ ، في شروط محددة تماما ، قيمة عددية معينة و التي يمكن أن تتغير (تزيد أو تنقص) إذا تغيرت هذه الشروط نفسها.

2/ مفهوم القياس (notion de mesure):

إن قياس مقدار فيزيائي لا يمكن أن يكون إلا تقريبا و هذا للاعتبارات التالية:

ــ أخطاء في تشغيل أجهزة القياس أو تدريجاتها (تدعى أخطاء نظامية) ،

ــ أخطاء حتمية أثناء عملية القياس و هي تعود إلى نقص دقة حواس المجرب (و تدعى أخطاء عرضية) ،

ــ الدقة المحدودة لأجهزة القياس.

حين نقيس مقدارا X فإننا لا نحصل إلا على قيمة تقريبية له x مهما كانت دقة القياس ؛ الفرق بين القيمة الحقيقية x_0 و القيمة التقريبية x تسمى **الخطأ المطلق** (erreur absolue) و نرمز له بــ : δx

$$\boxed{\delta x = x - x_0} \qquad (5.1)$$

و هي عموما غير معروفة. انطلاقا من خصائص الجهاز المستعمل و من الطريقة المستعملة يمكن دائما التأكد من أن الخطأ المرتكب لا يتجاوز قيمة حدية مطلقة مرتقبة معروفة و التي تسمى **الارتياب المطلق** (incertitude absolue) للمقدار X.

$$\boxed{|\delta x| \le \Delta x} \qquad (6.1)$$

و هكذا فإن القيمة الحقيقية محصورة بين حدين معروفين $x - \Delta x$ و $x + \Delta x$.

يمكن أن نعطي تعريفا رياضيا أكثر دقة للارتياب المطلق وفق التحليل التالي:

ليكن مقدار $X = f(x,y,z)$ حيث x ، y و z تمثل مقادير قابلة للقياس تشوبها ارتيابات.

الارتياب المطلق لـــ X، أي ΔX يتمثل في طويلة التفاضل dX بحيث $\Delta X \le |dX|$.

بما أن إشارة الأخطاء غير معروفة فمن البديهي أخذ القيم المطلقة للتفاضلات.

و بما أن $dX = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

فإن الارتياب المطلق ΔX لـــ X يكتب:

$$\Delta X \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \qquad (7.1)$$

❖ **تعريف**: نسمي **الارتياب النسبي**(incertitude relative) لمقدار النسبة بين الارتياب المطلق و القيمة التقريبية له أي $\frac{\Delta X}{X}$ و يساوي طويلة التفاضل اللوغاريتمي أي:

$$\frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right| \qquad (8.1)$$

3/ نظريات الارتيابات (théorèmes des incertitudes)

❖ **الإرتياب المطلق لمجموع جبري**: (incertitude absolue d'une somme algébrique)

✓ **نص النظرية**: الإرتياب المطلق **لمجموع جبري** يساوي **المجموع الحسابي** للارتيابات المطلقة لكل حد من حدوده.

إذا كان لدينا المجموع الجبري $y = nu + pv - qw + k$ حيث n و p و q معاملات موجبة و k ثابت خال من أي ارتياب و u، v و w ارتياباتها المطلقة هي على التوالي: Δu ، Δv و Δw فإن الارتياب المطلق لمقدار y هو: $\Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w$.

$$y = nu + pv - qw + k \Rightarrow \Delta y = n\Delta u + p\Delta v + q\Delta w \qquad (9.1)$$

هام: نكتب نتيجة قياس دائما على الشكل:

$$y_0 = (y \pm \Delta y)\, u \qquad (10.1)$$

حيث: القيمة الحقيقية: y_0 القيمة التقريبية: y

الارتياب المطلق: Δy الوحدة المناسبة: u

مثال 6.1 : نقيس الكتلة M بطريقة الوزن المضاعف فنحصل على النتيجتين $m_1 = 12.762g$ و $m_2 = 57.327g$. إذا علمت أن الارتياب المطلق لكل من m_1 و m_2 هو $\Delta m = \pm 2mg$ ، أحسب M و ΔM.

الجواب:

$$M = m_2 - m_1 \Rightarrow M = 44.565g$$
$$\Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 4mg = 0.004g$$

و هكذا فإن النتيجة تكتب دائما على الشكل أسفله بحيث يكون عدد الأرقام المعبرة بعد الفاصلة في القيمة التقريبية هو نفسه في الارتياب المطلق:

$$\boxed{M = (44.565 \pm 0.004)g}$$

أما الارتياب النسبي لـ M فهو:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{0.004}{44.565} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{M} = 9.10^{-5}}$$

أو

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_2 - m_1} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta M}{M} = 9.10^{-5}}$$

❖ **الارتاب النسبي لجداء أو كسر**: (incertitude relative d'un produit ou d'un quotient)

هناك حالتان :

الحالةالأولى: مقادير مستقلة عن بعضها البعض:

✓ **نص النظرية:** الارتياب النسبي لجداء أو كسر يساوي **المجموع الحسابي** للارتيابات النسبية لكل حد من حدوده.

البرهان الرياضي:

ليكن الجداء $y = ku^n v^p w^{-q}$ حيث n ، p و q أعداد صحيحة و k ثابت خال من أي ارتياب و u ، v و w ارتياباتها المطلقة هي على التوالي: Δu ، Δv و Δw.

لنطبق الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة :

$$\log y = \log\left[ku^n v^p w^{-q}\right]$$

و حسب خواص اللوغاريتم:

$$\log y = \log k + n\log u + p\log v - q\log w$$

نكتب الآن التفاضل اللوغاريتمي ثم ننشر:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+n\frac{du}{u}+p\frac{dv}{v}-q\frac{dw}{w}$$

نصل إلى عبارة الارتياب النسبي (بعد تغيير الإشارة – إلى الإشارة +) و نأخذ القيم المطلقة للأعداد:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=|n|\frac{\Delta u}{u}+|p|\frac{\Delta v}{v}+|q|\frac{\Delta w}{w}} \qquad (11.1)$$

يمكن استخلاص القاعدة العامة المسيرة لمثل هذه الحسابات:

- كل الرموز di تعوض بالرموز Δi
- تغير الإشارة – إلى إشارة +
- نأخذ المقادير التي لا تحتوي على Δ بقيمها المطلقة.

الحالةالثانية: مقادير مرتبطة فيما بينها:

ليكن $y=k\dfrac{u^{\alpha}v^{\beta}}{(u+v)^{\gamma}t^{\delta}}$

نتبع نفس الخطوات:

$$\log y=\log k+\alpha\log u+\beta\log v-\gamma\log(u+v)-\delta\log t$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+\alpha\frac{du}{u}+\beta\frac{dv}{v}-\gamma\frac{du}{u+v}-\gamma\frac{dv}{u+v}-\delta\frac{dt}{t}$$

نجمع كل الحدود التي لها نفس الطبيعة أي نفس di و نستبدل الإشارة – بالإشارة +:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dk}{k}+du\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+dv\left(\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right)-\delta\frac{dt}{t}$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y}=\Delta u\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+\Delta v\left(\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma}{u+v}\right)+|\delta|\frac{\Delta t}{t}} \qquad (12.1)$$

مثال 7.1: أحسب الارتياب النسبي ثم الارتياب المطلق للطاقة الكهربائية المعبر عنها بالقانون $Q=RI^2t$.

الجواب: حسب نظرية الارتياب النسبي لجداء يمكننا كتابة:

$$Q=RI^2t \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta R}{R}+2\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta t}{t}$$

و من هذا نستنتج عبارة الارتياب المطلق: $\Delta Q=Q\left(\dfrac{\Delta R}{R}+2\dfrac{\Delta I}{I}+\dfrac{\Delta t}{t}\right)$

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 1.7

Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieur (D_1) et extérieur (D_2) et on trouve :

$D_1 = (19,5 \pm 0,1)mm$, $D_2 = (26,7 \pm 0,1)mm$

Donner le résultat de la mesure et sa précision.

تمرين 7.1

لقياس سمك اسطوانة مجوفة نقيس القطرين الداخلي (D_1) و الخارجي (D_2) فنجد:

$D_2 = (26,7 \pm 0,1)mm$ ، $D_1 = (19,5 \pm 0,1)mm$

إعط نتيجة القياس و دقته.

Exercice 1.8

Soit à déterminer la masse volumique (ρ) de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse (m) et de son arête (a) . Ecrire le résultat de la mesure.

التمرين 8.1

نريد تعيين الكتلة الحجمية (ρ) لمادة مكعب متجانس انطلاقا من قياس كتلته (m) و ضلعه (a).أكتب نتيجة القياس.

Exercice 1.9

On veut déterminer la densité (δ) d'un corps solide par application du théorème d'Archimède qui est : $\delta = \dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$

Où m_1, m_2, m_3 sont les résultats de trois mesures de masses effectuées, successivement, avec la même balance. Trouver l'incertitude relative sur δ .

التمرين 9.1

نريد تعيين الكثافة (δ) لجسم صلب بتطبيق نظرية أرخميدس و التي هي : $\delta = \dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$

حيث m_3, m_2, m_1 تمثل نتائج ثلاث قياسات متتالية للكتل باستعمال نفس الميزان. جد الإرتياب النسبي لـــ δ .

Exercice 1.10

Calculer l'incertitude relative sur la mesure de la capacité (C) d'un condensateur équivalent à deux condensateurs montés en :

a/ en parallèle b/ en série , et cela en fonction des précisions sur (C_1) et (C_2) .

التمرين 10.1

أحسب الارتياب النسبي المرتكب على قياس السعة (C) لمكثفة مكافئة لمكثفتين موصلتين على:

ا/ التفرع ب/ على التسلسل ، و ذلك بدلالة الدقة على كل من (C_1) و (C_2).

Exercice 1.11

Soit l'expression : $\mu = \dfrac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1} - m_1$

Calculer l'incertitude absolue sur μ en fonction des incertitudes absolues $\Delta\theta_m, \Delta\theta_2, \Delta\theta_1, \Delta m_2, \Delta m_1$.

التمرين 11.1

لتكن العبارة : $\mu = \dfrac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1} - m_1$

أحسب الارتياب المطلق على μ بدلالة الارتيابات المطلقة $\Delta\theta_m, \Delta\theta_2, \Delta\theta_1, \Delta m_2, \Delta m_1$.

Exercice 1.12

Soit la relation : $y = e^{-wt} + y_0$.

Calculer l'incertitude absolue sur y en fonctions des incertitudes absolue $\Delta\omega, \Delta t, \Delta y_0$.

التمرين 12.1

لتكن العلاقة : $y = e^{-wt} + y_0$

أحسب الارتياب المطلق على y وذلك بدلالة الارتيابات المطلقة $\Delta y_0, \Delta t,, \Delta\omega$.

Corrigés des exercices 1.7 à 1.12: حلول التمارين من 7.1 إلى 12.1

التمرين 7.1

نحسب أولا سمك الاسطوانة: e=3,6mm ; $e = \frac{D_2 - D_1}{2}$

حساب الارتياب المطلق على السمك: $\Delta e = \pm 0,1mm$; $\Delta e = \frac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2}$

كتابة النتيجة: $e = (3,6 \pm 0,1)mm$

استنتاج الارتياب النسبي: $\frac{\Delta e}{e} = \frac{0,1}{3,6} \Rightarrow \frac{\Delta e}{e} = 0,03 = 3\%$

التمرين 8.1 :

حساب الكتلة الحجمية: ρ=3,041g/cm^3 $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$

استنتاج الارتياب المطلق من عبارة الارتياب النسبي:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}\right) \quad \Delta\rho \simeq 0,02g/cm^3$$

أما الإرتياب النسبي فهو: $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0,0063 = 6,3\ {}^0/_{00}$

كتابة نتيجة القياس: $\rho = (3,04 \pm 0.02)g/cm^3$

ملاحظة: القيمة التقريبية و الارتياب المطلق يجب أن يشتملا على نفس عدد الأرقام العشرية (هنا اثنان) ؛ غير أن في بعض الحالات يكون من اللازم ، بعد حساب الارتياب المطلق ، العودة إلى القيمة التقريبية التي حصلنا عليها بكثير أو قليل من الأرقام العشرية ثم تصحيحها بعملية التقريب لكي تتلاءم مع الارتياب المطلق.

التمرين 9.1 :

لدينا العبارة: $\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$ ، نلاحظ أن الكتل الثلاثة مرتبطة.

نطبق الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة: $\log\delta = \log(m_2 - m_1) - \log(m_3 - m_1)$

ثم نمر إلى التفاضل اللوغاريتمي:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{d(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1} - \frac{d(m_3 - m_1)}{m_3 - m_1}$$

و الآن ننشر:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{dm_2}{m_2 - m_1} - \frac{dm_1}{m_2 - m_1} - \frac{dm_3}{m_3 - m_1} + \frac{dm_1}{m_3 - m_1}$$

ثم نجمع الحدود ذات العوامل المشتركة:

$$\frac{d\delta}{\delta}=dm_1\left(\frac{1}{m_3-m_1}-\frac{1}{m_2-m_1}\right)+\frac{dm_2}{m_2-m_1}-\frac{dm_3}{m_3-m_1}$$

نمر الآن إلى الارتيابات النسبية باستبدال di بـــ Δi ونغير إشارة $(-)$ للعوامل المشتركة بعلامة $(+)$ ، و بافتراض أن $\Delta m_1=\Delta m_2=\Delta m_3=\Delta m$ (لأننا استعملنا نفس الميزان) يحصل لدينا:

$$\frac{\Delta\delta}{\delta}=\Delta m\left(\frac{1}{m_3-m_1}-\frac{1}{m_2-m_1}\right)+\frac{\Delta m}{m_2-m_1}+\frac{\Delta m}{m_3-m_1}$$

و في الأخير نحصل على: $\boxed{\frac{\Delta\delta}{\delta}=\frac{2\Delta m}{m_3-m_1}}$

التمرين 10.1 :

ا/ **التوصيل على التفرع:**

سعة المكثفة المكافئة لمكثفتين موصلتين على التفرع تحسب بالعبارة: $C=C_1+C_2$

نطبق الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة ثم نمر إلى التفاضل اللوغاريتمي:

$$\log C=\log\left(C_1+C_2\right)\Rightarrow\frac{dC}{C}=\frac{dC_1}{C_1+C_2}+\frac{dC_2}{C_1+C_2}$$

و منه فإن الارتياب النسبي هو:

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C}=\frac{\Delta C_1}{C_1+C_2}+\frac{\Delta C_2}{C_1+C_2}}\Leftrightarrow\boxed{\frac{\Delta C}{C}=\frac{\Delta C_1}{C_1}\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)+\frac{\Delta C_2}{C_2}\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)}$$

ب/ **التركيب على اتسلسل:**

سعة المكثفة المكافئة لمكثفتين موصلتين على التسلسل تحسب بالعبارة:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Rightarrow C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

نطبق الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة ثم نمر إلى التفاضل اللوغاريتمي:

$$\log C=\log\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)\Rightarrow\log C=\log C_1+\log C_2-\log\left(C_1+C_2\right)$$

$$\frac{dC}{C}=\frac{dC_1}{C_1}+\frac{dC_2}{C_2}-\frac{dC_1}{C_1+C_2}-\frac{dC_2}{C_1+C_2}$$

نجمع الحدود ذات العوامل المشتركة:

$$\frac{dC}{C}=dC_1\left(\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_1+C_2}\right)+dC_2\left(\frac{1}{C_2}-\frac{1}{C_1+C_2}\right)$$

يمكن كتابة العبارة السابقة على الشكل:

$$\frac{dC}{C}=\frac{dC_1}{C_1}\left(1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)+\frac{dC_2}{C_2}\left(1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)$$

الارتياب النسبي المطلوب إذن هو:

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C}=\frac{\Delta C_1}{C_1}\left(1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)+\frac{\Delta C_2}{C_2}\left(1-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)}$$

<u>التمرين 11.1</u> :

نكتب العبارة على الشكل: $\mu+m_1=\dfrac{m_2\left(\theta_2-\theta_m\right)}{\theta_m-\theta_1}$

بإدخال الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة نحصل على:

$$\log\left(\mu+m_1\right)=\log m_2+\log\left(\theta_2-\theta_m\right)-\log\left(\theta_m-\theta_1\right)$$

التفاضل اللوغاريتمي للعبارة السابقة هو:

$$\frac{d\left(\mu+m_1\right)}{\mu+m_1}=\frac{dm_2}{m_2}+\frac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\frac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$$

أو:

$$\frac{d\mu}{\mu+m_1}=-\frac{dm_1}{\mu+m_1}+\frac{dm_2}{m_2}+\frac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_2-\theta_m}-\frac{d\theta_m}{\theta_m-\theta_1}+\frac{d\theta_1}{\theta_m-\theta_1}$$

أي:

$$d\mu=-dm_1\frac{\mu+m_1}{\mu+m_1}+dm_2\frac{\mu+m_1}{m_2}+d\theta_2\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}-d\theta_m\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}+d\theta_1\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}$$

و في الأخير فإن الارتياب المطلق المطلوب يساوي:

$$\boxed{\Delta\mu=+\Delta m_1+\Delta m_2\left(\frac{\mu+m_1}{m_2}\right)+\Delta\theta_2\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}\right)+\Delta\theta_m\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_2-\theta_m}+\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)+\Delta\theta_1\left(\frac{\mu+m_1}{\theta_m-\theta_1}\right)}$$

<u>التمرين 12.1</u> :

بعد إدخال الدالة اللوغاريتمية على طرفي المعادلة نحصل على:

$$\log y=\log e^{-\omega t}+\log y_0$$

تفاضلها:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{d\omega t}{\omega t}+\frac{dy_0}{y_0}=-\frac{d\omega}{\omega t}+\frac{dt}{\omega t}+\frac{dy_0}{y_0}\Rightarrow\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta\omega}{\omega t}+\frac{\Delta t}{\omega t}+\frac{\Delta y_0}{y_0}$$

الارتياب المطلق هو:

$$\boxed{\Delta y=y\left(\frac{\Delta\omega}{\omega t}+\frac{\Delta t}{\omega t}+\frac{\Delta y_0}{y_0}\right)}$$

II/ تذكير بالحساب الشعاعي
RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL

1/المقدار السلمي: (grandeur scalaire) يعبر عن المقدار السلمي بقيمة عددية في الوحدة المناسبة.

أمثلة: الحجم، الكتلة، درجة الحرارة، الشحنة، الطاقة.....

2/المقدار الشعاعي: (grandeur vectorielle) يستلزم تحديد إتجاهه، جهته و نقطة تأثيره زيادة على قيمته العددية. تسمى هذه المقادير بالمتجهات أو الأشعة.

أمثلة: الإنتقال، السرعة، القوة، الحقل الكهربائي.......

3/التمثيل البياني للشعاع: (أنظر الشكل 1.2)

O $\vec{V}$

الشكل 1.2

$\vec{V}$: يرمز إلى الشعاع أي مقدارا و اتجاها.

$\|\vec{V}\| = |\vec{V}| = V$: يرمز إلى المقدار (القيمة العددية أي الشدة أو الطويلة أو المعيار).

4/شعاع الواحدة: (vecteur unitaire) هو شعاع طويلته تساوي الواحد.

يمكن التعبير عن شعاع مواز لشعاع الواحدة بالشكل:

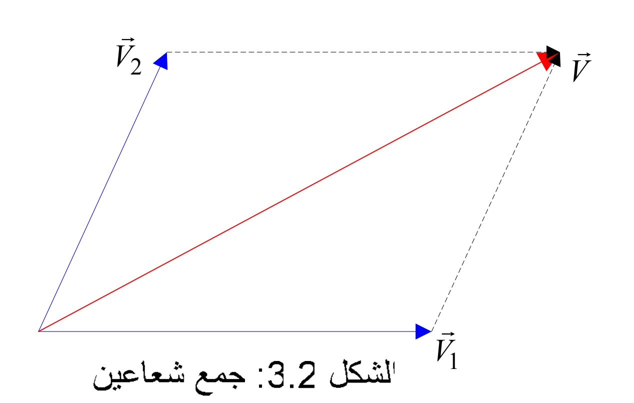
O $\vec{u}$ $\vec{V}$

الشكل 2.2

$$\vec{V} = \vec{u}.V = V.\vec{u} \qquad (1.2)$$

5/الجمع الهندسي للأشعة: (somme vectorielle) يمكن جمع الأشعة بيانيا و لذا حق تسمية العملية بالجمع الهندسي.

جمع شعاعين: عملية جمع الأشعة عملية تبديليه:



الشكل 3.2: جمع شعاعين

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

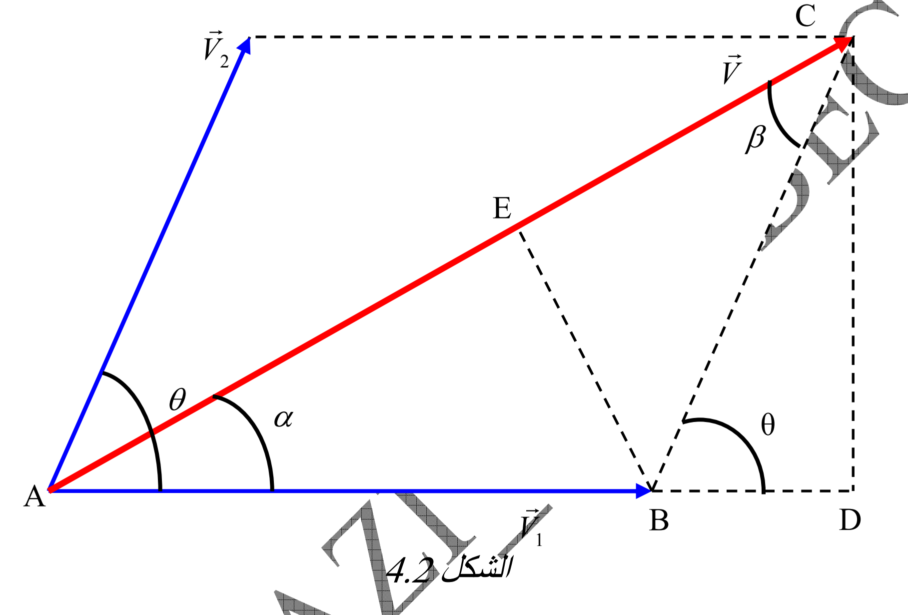
$$\vec{V} = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

نحصل على شدة الشعاع بواسطة العلاقة التالية و التي تسمى بقانون جيوب التمام (loi des cosinus) و التي سنبرهن عنها لاحقا في فقرة الجداء السلمي.

$$\boxed{V=\sqrt{V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\cos\left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right)}} \qquad (2.2)$$

لتحديد جهة(أي حامل) $\vec{V}$ يكفي تحديد الزاوية α حيث نلاحظ في الشكل4.2 أنه في المثلث **ACD :**

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{CD}{V}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{CD}{V_2}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_2}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{V.\sin\alpha=V_2.\sin\theta} \qquad (3.2)$$



الشكل 4.2

و بالمثل في المثلث BEC فإن:

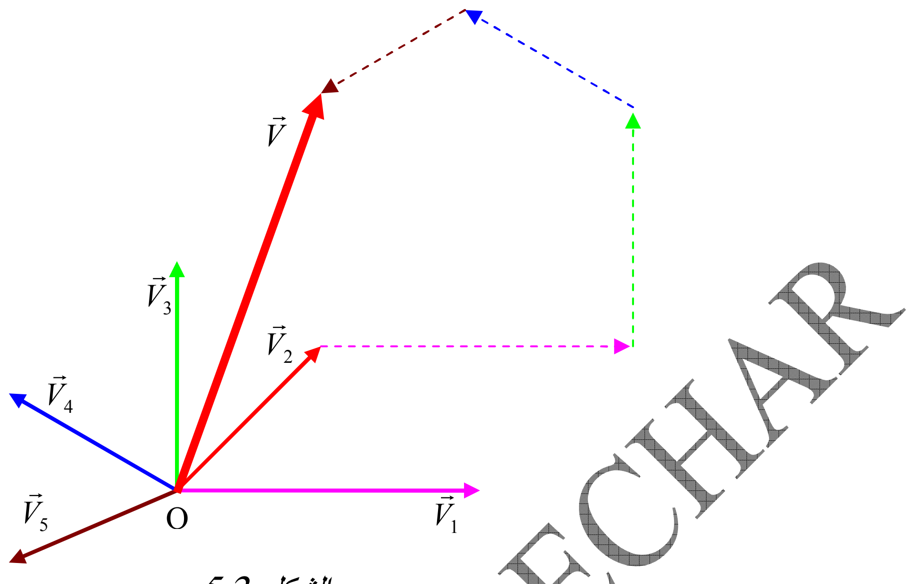
$$\left.\begin{array}{l}\sin\beta=\dfrac{BE}{BC}\\[2ex] \sin\alpha=\dfrac{BE}{AB}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{V_2}{\sin\alpha}=\frac{V_1}{\sin\beta} \Rightarrow \boxed{V_2.\sin\beta=V_1.\sin\alpha} \qquad (4.2)$$

من (3.2) و (4.2) نستنتج العلاقة العامة التالية و التي تسمى بقانون الجيوب (loi des sinus)

$$\boxed{\frac{V}{\sin\theta}=\frac{V_1}{\sin\beta}=\frac{V_2}{\sin\alpha}} \qquad (5.2)$$

حالة خاصة: أذا كانت $\theta=\pi/2$ فإن $V=\sqrt{V_1^2+V_2^2}$ و $tg\alpha=\dfrac{V_2}{V_1}$

الجمع الهندسي لعدة أشعة: (لاحظ الشكل 5.2) $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5$



الشكل 5.2

الفرق بين الأشعة: هندسيا يمثل الشعاع $\vec{D}$ في الشكل6.2 الفرق بين الشعاعين $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_1$

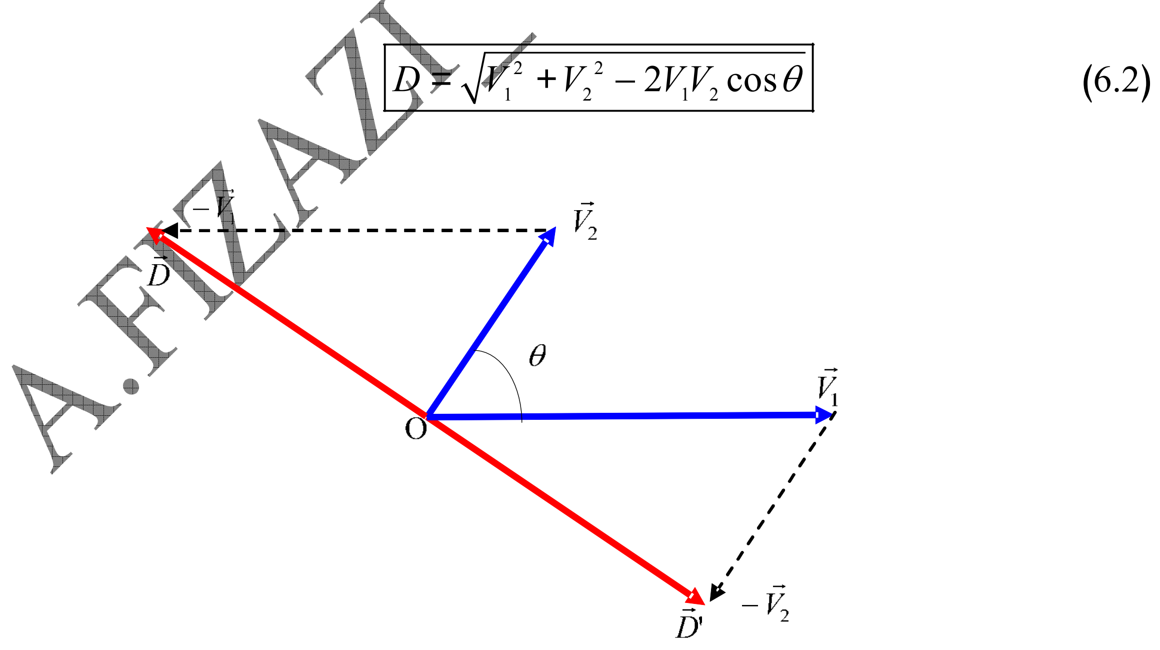
حيث يمكن كتابة: $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل التالي: $\vec{D} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$

عملية طرح الأشعة ليست تبديلية، هذا ما نلاحظه على الشكل: $\vec{D}\,' = -\vec{D}$

طويلة الشعاع $\vec{D}$: (module du vecteur)

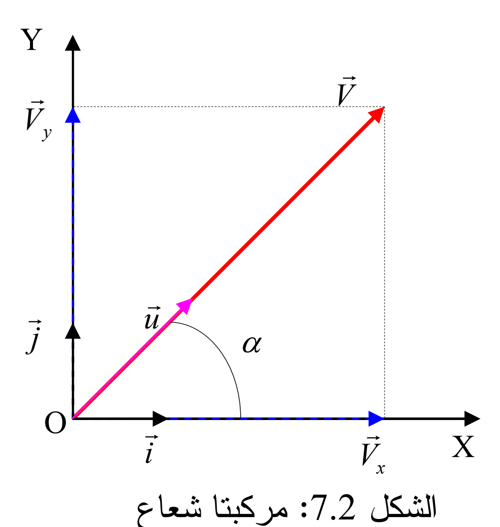
$$\boxed{D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}} \qquad (6.2)$$



الشكل 6.2: الفرق بين شعاعين

6/مركبات الشعاع: (composantes d'un vecteur) يمكن اعتبار كل شعاع على أنه مجموع شعاعين (أو أكثر،وعدد الإمكانيات لا نهائي.)

في المستوي: في المعلم $\Re\ (O;\vec{i},\vec{j})$:



الشكل 7.2: مركبتا شعاع

عادة تستعمل المركبات المتعامدة:

حيث $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$

$V_x = V\cos\alpha$

$V_y = V\sin\alpha$

بتحديد شعاعي الواحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ في اتجاه كل من المحورين OX و OY

نلاحظ أن:

$$\vec{V}_x = \vec{i}.V_x \quad , \quad \vec{V}_y = \vec{j}.V_y \quad ;$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y \quad ;$$

$$\vec{V} = \vec{i}.V\cos\alpha + \vec{j}.V\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V(\vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha)} \qquad (7.2)$$

و في الأخير و بما أن: $\vec{V} = \vec{u}.V$ فإن:

$$\boxed{\vec{u} = \vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha} \qquad (8.2)$$

أما طويلة الشعاع $\vec{V}$ فهي: $V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$

يمكن استعمال رموز أخرى: $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال1.2: أوجد محصلة الشعاعين: $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ في المعلم $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

الحل: $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 + x_2) + \vec{j}(y_1 + y_2) \;\longrightarrow\; V = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$

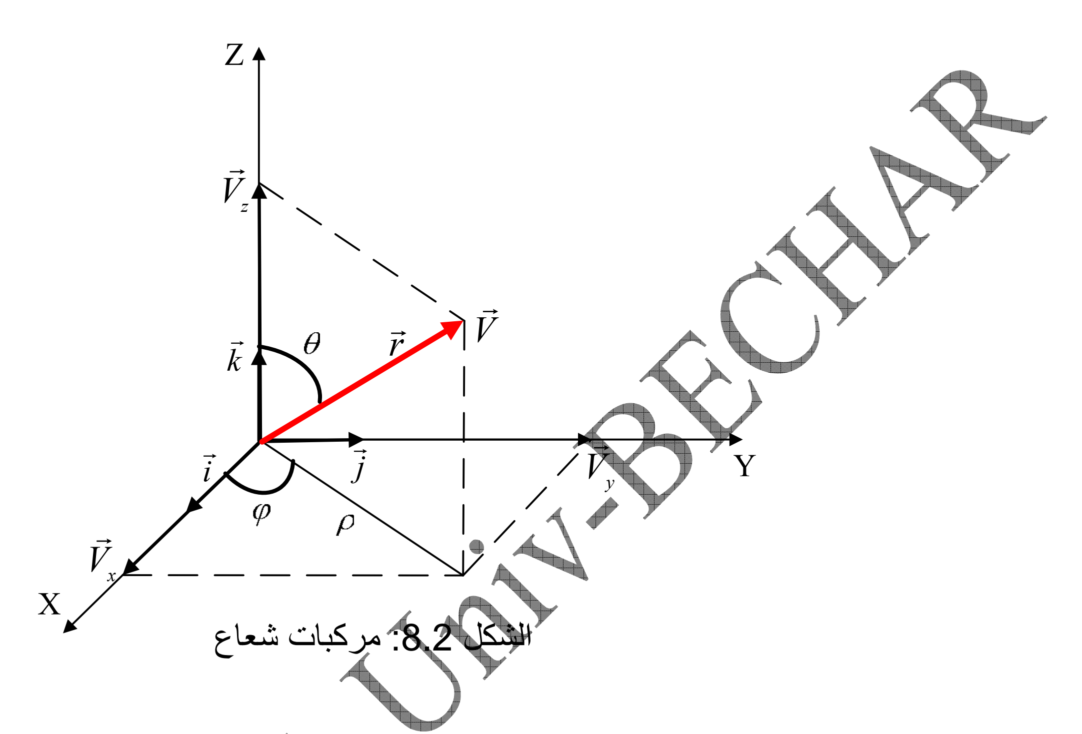
مثال 2.2: أوجد الفرق بين الشعاعين $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ في المعلم $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

الحل: $\vec{V}=\vec{V}_1-\vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V}=\vec{i}(x_1-x_2)+\vec{j}(y_1-y_2) \Rightarrow V=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

في الفضاء: في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (قاعدة متعامدة و متجانسة):

نلاحظ أن:

$$\vec{V}=\vec{V}_x+\vec{V}_y+\vec{V}_z \Rightarrow \vec{V}=\vec{i}.V_x+\vec{j}.V_y+\vec{k}.V_z$$



الشكل 8.2: مركبات شعاع

يمكن التحقق هندسيا من أن:

$$\cos\theta=\frac{V_z}{r} \Rightarrow V_z=r.\cos\theta$$

$$\sin\theta=\frac{\rho}{r} \Rightarrow \rho=r.\sin\theta;$$

$$\cos\varphi=\frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x=\rho.\cos\varphi \Rightarrow V_x=r.\sin\theta.\cos\varphi$$

$$\sin\varphi=\frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y=\rho.\sin\varphi \Rightarrow V_y=r\sin\theta.\sin\varphi$$

في النهاية:

$$\begin{cases} V_x=V\sin\theta.\cos\varphi \\ V_y=V.\sin\theta.\sin\varphi \\ V_z=V.\cos\theta \end{cases} \qquad (9.2)$$

أما طويلة الشعاع فهي: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}$

أو بالإحداثيات الديكارتية: $V=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

ملاحظة: إذا رمزنا بـــ α و β إلى الزاويتين اللتين يصنعهما الشعاع $\vec{V}$ مع المحورين OX و OY على التوالي ، و بمثل ما حصلنا على المعادلة الثالثة من العلاقة 9.2 فيكون لدينا:

$$\boxed{V_x = V.\cos\alpha \quad , \quad V_y = V.\cos\beta \quad , \quad V_z = V.\cos\theta} \qquad (10.2)$$

يمكن استنتاج العبارة:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1} \qquad (11.2)$$

مثال 3.2:أوجد المسافة الفاصلة بين النقطتين A(10,-4,4)u ; B(10,6,8) u الممثلتين على معلم مستطيل $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، حيث $u=$ وحدة.

الحل: نعين النقطتين على المعلم الديكارتي ليتبين لنا أن المسافة المطلوب حسابها هي: $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ وبالتالي فإن المسافة هي طويلة الشعاع $\vec{D}$.

$$\vec{D} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) \Rightarrow \ \vec{D} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{D} = \vec{i}(0) + \vec{j}(10) + \vec{k}(4) \Rightarrow D = \sqrt{116} = 10,77u$$

مثال 4.2:أوجد محصلة الأشعة الخمسة التالية:

$$\vec{V}_1 = (4\vec{i} - 3\vec{j})\ u; \vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 2\vec{j})\ u; \vec{V}_3 = (2\vec{i} - 6\vec{j})u; \vec{V}_4 = (7\vec{i} - 8\vec{j})u; \vec{V}_5 = (9\vec{i} + \vec{j})u$$

الحل:

$$\vec{V} = (4-3+2+7+9)\vec{i} + (-3+2-6-8+1)\vec{j} \Rightarrow \vec{V} = 19\vec{i} - 14\vec{j} \Rightarrow V = \sqrt{361+196} = 23.60u$$

لإيجاد منحى أو حامل الشعاع $\vec{V}$ ننطلق من العلاقة $tg\alpha = \dfrac{V_y}{V_x}$ و هي الزاوية التي يصنعها $\vec{V}$ مع المحور OX: $\quad tg\alpha = -14/19 \approx 0,737 \Rightarrow \alpha \approx 36,38°$

7/الجداء السلمي (produit scalaire)

تعريف:نسمي الجداء السلمي لشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ العدد الحقيقي $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ بحيث:

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1.V_2.\cos(\vec{V}_1.\vec{V}_2)} \qquad (12.2)$$

أو :

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\left[(V_1 + V_2)^2 - V_1^2 - V_2^2\right]} \qquad (13.2)$$

حالات خاصة:

إذا كان $\vec{V}_1 = \vec{0}$ أو $\vec{V}_2 = \vec{0}$ فإن $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

إذا كان $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ و $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ فإن:

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$$

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1,\vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V} = V_1 V_2$$

مثلا:عمل قوة $\vec{F}$ تحدث انتقالا $\overrightarrow{AB}$ يعطى بالعلاقة: $W = F.AB.\cos\alpha$ حيث $\alpha = (\vec{F};\overrightarrow{AB})$

و نقرأ: W هو الجداء السلمي لـــ $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AB}$) و نكتب:

$$\vec{W} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad W = F.AB.\cos\alpha$$

لنبرهن الآن عن المعادلة (2.2) كما وعدنا:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \;\; ; \;\; \vec{V}^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2\vec{V}_1\vec{V}_2 \;\; ; \;\; \vec{V}_1^2 = \vec{V}_1.\vec{V}_1 = V_1V_1\cos(\vec{V}_1\vec{V}_1) = V_1^2 ;$$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2) \Rightarrow V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)}$$

العبارة التحليلية للجداء السلمي: (expression analytique du produit scalaire)

ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعين في مستوي، حيث: $\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} ; \vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j})$:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \left(x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j}\right).(x_2.\vec{i} + y_2.\vec{j}) = x_1.x_2.\vec{i}.\vec{i} + x_1.y_2.\vec{i}.\vec{j} + x_2.y_1.\vec{j}.\vec{i} + y_1.y_2.\vec{j}.\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{j}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{j} = 0\\ \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2.} \qquad \textbf{(14.2)}$$

في الفضاء (dans l'espace)

ليكن $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شعاعين في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0\\ \vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 1\end{array}} \; \text{هـــما} \; \vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} ; \vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2} \quad (15.2)$$

خصائص الجداء السلمي:(propriétés du produit scalaire)

تبديلي(commutatif): $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$

غير تجميعي(non associatif): لا وجود لـــ $\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2.\vec{V}_3\right)$ لأن الناتج هو شعاع.

توزيعي(distributif) بالنسبة للجمع الشعاعي: $\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right) = \vec{V}_1.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\vec{V}_3$

مثال5.2: أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين: $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

الحل:

انطلاقا من عبارة الجداء السلمي يمكننا حساب الزاوية المطلوبة: $\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)=\dfrac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}$

و منه:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_1=-3+4-3=-2\ ;\ V_1=\sqrt{9+4+1}=3.74\ ;\ V_2=\sqrt{1+4+9}=3.74$$

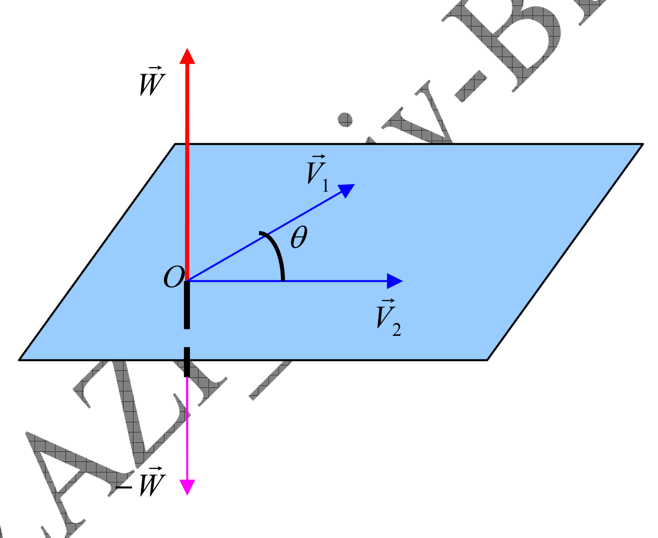
$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)=\frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}=\frac{-2}{14}=-0.143\Rightarrow\theta=(\vec{V}_1\vec{V}_2)=96.2°$$

8/الجداء الشعاعي: (produit vectoriel)

تعريف: نسمي الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ الشعاع $\vec{W}$ العمودي على المستوي المكون لهما.

نكتب اصطلاحا:

$$\vec{W}=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\vec{V}_1\times\vec{V}_2$$



الشكل 9.2: جداء شعاعين

مميزات الشعاع $\vec{W}$: (caractéristiques du vecteur)

$\vec{W}$ يكون عموديا على المستوي المشكل من الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$، اتجاهه يحدد بطريقة اليد اليمنى (الإبهام يشير إلى $\vec{W}$)، أما شدته فتحسب بالقانون:

$$W=\left|\vec{W}\right|=V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \qquad (16.2)$$

هـــام:

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\ ;\ \vec{i}\wedge\vec{k}=\vec{j}\ ;\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$$
$$\left|\vec{i}\wedge\vec{j}\right|=\left|\vec{i}\wedge\vec{k}\right|=\left|\vec{j}\wedge\vec{k}\right|=1$$

ملاحظة: المقدار $W=\left|\vec{W}\right|=V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1;\vec{V}_2)$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع : مما يوحي بإمكانية ربط شعاع بمساحة ما.

طريقة أخرى لكتابة الجداء الشعاعي الناتج عن الشعاعين $\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$; $\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$

باستعمال الإحداثيات الديكارتية في المعلم $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{W}=\begin{vmatrix}+\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

$$\vec{W}=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\vec{i}-\left(x_1z_2-x_2z_1\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\vec{k}$$

وبالتالي فإن الطويلة تحسب بالعبارة:

$$\boxed{W=\sqrt{\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(x_1z_2-x_2z_1\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}=V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1,\vec{V}_2)}\quad(17.2)$$

خصائص الجداء الشعاعي:(propriétés du produit vectoriel)

تبديلي مضاد (anticommutatif): $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=-\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1$

غير تجميعي (non associatif): $\vec{V}_1\wedge\left(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3\right)\neq\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)\wedge\vec{V}_3$

توزيعي (distributif) بالنسبة للجمع الشعاعي: $\vec{V}_1\wedge\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)=\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right)+\left(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_3\right)$

مثال 6.2: إحسب الشعاع $\vec{W}$، جداء الشعاعين: $\vec{V}_1=(2,1,-1);\vec{V}_2=(1,0,-2)$، ثم استنتج الزاوية θ بينهما.

الحل:

$$\vec{W}=\left[(1\times-2)-(0\times-1)\right].\vec{i}-\left[(2\times-2)-(1\times-1)\right].\vec{j}+\left[(2\times0)-(1\times1)\right].\vec{k}\Rightarrow\vec{W}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

$$V_1=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$V_2=\sqrt{1^2+0+2^2}=\sqrt{5}$$

$$W=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}=3,74$$

$$W=V_1.V_2.\sin\theta=3,74\Rightarrow\sin\theta=\frac{W}{V_1.V_2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{3,74}{\sqrt{30}}=0,683\Rightarrow\theta=43,06°$$

9/الجداء المختلط:(produit mixte)

الجداء المختلط لثلاثة أشعة $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ هو المقدار السلمي المعرف بــ:

$$\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\left(y_2z_3-y_3z_2\right)x_1-\left(x_2z_3-x_3z_2\right)y_1+\left(x_2y_3-x_3y_2\right)z_1 \qquad (18.2)$$

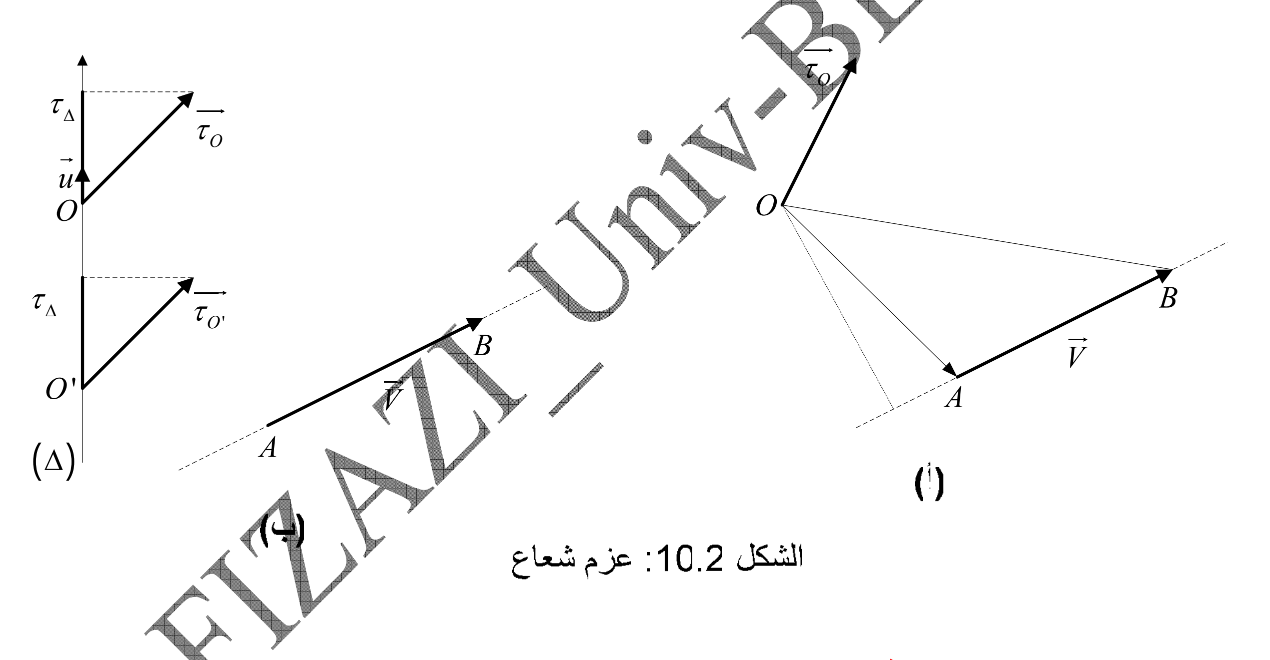
10/عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء:

(moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace)

تعريف: عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء هو الشعاع المعرف بــ:

$$\vec{\tau}_O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V} \qquad (19.2)$$

ملاحظة: $\left\|\vec{\tau}_O\right\|=$ **ضعف مساحة المثلث** AOB. (الشكل10.2-أ-)



الشكل 10.2: عزم شعاع

11/عزم شعاع بالنسبة لمحور:(moment d'un vecteur par rapport à un axe)

التعريف الأول: عزم شعاع بالنسبة لمحور يساوي مسقط عزم هذا الشعاع بالنسبة لنقطة من المحور مهما كانت.

التعريف الثاني: عزم الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة لمحور Δ مبدأه O شعاع واحدته $\vec{u}$ يساوي الجداء المختلط:

$$\tau_\Delta=\vec{\tau}_O.\vec{u}=\left(\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}\right).\vec{u} \qquad (20.2)$$

ملاحظة: عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء هو شعاع بينما عزم شعاع بالنسبة لمحور فهو مقدار سلمي. الشكل10.2-ب-

12/التدرج، التباعد و الدوران:(gradient, divergence, rotationnel)

❖ **تعاريف:**

- نسمي دالة $f(x,y,z)$ حقلا سلميا إذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ سلمية.
- بالمثل نسمي دالة $\vec{V}(x,y,z)$ حقلا شعاعيا إذا كانت الدالة $\vec{V}(x,y,z)$ شعاعية.
- نعرف المؤثر (opérateur) الشعاعي التفاضلي $\vec{\nabla}(nabla)$ بـــ:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (21.2)$$

حيث $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ و $\frac{\partial}{\partial z}$ هي المشتقات الجزئية . نعرف التدرج و التباعد و الدوران بواسطة هذا المؤثر.

❖ **التدرج:** (gradient) إذا كانت $f(x,y,z)$ الدالة سلمية فإن تدرجها مقدار شعاعي معرف كالتالي:

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (22.2)$$

مثال 7.2: أحسب تدرج الدالة $f(x,y,z) = f = 3x^2y^3z$

الجواب: $\overrightarrow{grad} f = 6xy^3z.\vec{i} + 9x^2y^2z.\vec{j} + 3x^2y^3.\vec{k}$

❖ **التباعد:** (divergence) إذا كانت $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ دالة شعاعيه فإن تباعدها مقدار سلمي معرف كالتالي:

❖

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (23.2)$$

مثال 8.2: أحسب تباعد الدالة الشعاعية التالية:

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

الجواب:

$$div\vec{V} = 2y - 3z^2 + 0 = 2y - 3z^2$$

❖ الدوران: (rotationnel) إذا كان المقدار الشعاعي $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ فإن دورانه هو:

$$\boxed{\overrightarrow{rot(\vec{V})} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right).\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right).\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).\vec{k}} \quad (24.2)$$

للوصول إلى العبارة المبتغاة يستحسن إتباع الخطوات التالية:

ا/ نقيم الجدول التالي:

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = A + B + C$$

ب/ لحساب C, B, A نتبع الطريقة التالية:

$$A = \begin{vmatrix} +\vec{i} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)$$

$$B = \begin{vmatrix} & -\vec{j} & \\ \frac{\partial}{\partial x} & & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & & V_z \end{vmatrix} = -\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

$$C = \begin{vmatrix} & & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \\ V_x & V_y & \end{vmatrix} = +\vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

ج/ في النهاية نحصل على المعادلة (24.2):

$$\begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \text{-}\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

مثال 9.2:أحسب دوران الشعاع: $\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$.

الجواب:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \left(27xy^2 - 6yz\right).\vec{i} - (9y^3 - 0).\vec{j} + (0 - 2x).\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \left(27xy^2 - 6yz\right).\vec{i} - 9y^3\vec{j} - 2x\vec{k}$$

13/الابلاسيان(le laplacien)

❖ **تعريف**:

❖ **في الإحداثيات الكارتيزية**:

– لابلاسيان **دالة سلمية** هو تباعد تدرّج الدالة:

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} \qquad (25.2)$$

– لابلاسيان **دالة شعاعية** هو تباعد تدرّج الدالة:

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{V_x}}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\vec{k}} \qquad (26.2)$$

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

تنبيه: في كل تمارين هذه السلسلة نعتبر أن طويلات الأشعة معبّر عنها بنفس الوحدة.

Exercice 2.1

On considère , dans un repère orthonormé OXYZ, les trois vecteurs : $\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

a/ calculer les modules de $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$,

b/ calculer les composantes ainsi que les modules des vecteurs : $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ et $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$,

c/ déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$,

d/ calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ et en déduire l'angle formé par les deux vecteurs.

e/ calculer le produit vectoriel $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$.

تمرين 1.2

في معلم متجانس و متعامد $OXYZ$، نعتبر الأشعة الثلاثة التالية: $\vec{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

ا/ أحسب طويلة كل من $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$.

ب/ أحسب مركبات و طويلات الأشعة $\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ و $\vec{B} = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

ج/ عين شعاع الواحدة المحمول على $\vec{C} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3$

د/ أحسب الجداء السلمي $\vec{V}_1.\vec{V}_3$ ثم إستنتج الزاوية المحصورة بينهما.

ه/ أحسب الجداء الشعاعي $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$

Exercice 2.2

Montrer que les grandeurs de la somme et de la différence de deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ exprimées en coordonnées rectangulaires sont respectivement :

$$S = \left[(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \left[(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \right]^{1/2}$$

التمرين2.2

تحقق من إن مقدراي المجموع و الفرق لشعاعين $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ المعبر عنهما بالإحداثيات المستطيلة على التوالي هما:

$$S = \left[(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2 \right]^{1/2}$$

$$D = \left[(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \right]^{1/2}$$

Exercice 2.3

Trouver la sommes des trois vecteurs : $\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$; $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$.

Calculer le module de la résultante ainsi que les angles qu'elle forme avec OY, OX et OZ .

التمرين3.2

أوجد محصلة مجموع الأشعة التالية : $\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ؛ $\vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ؛ $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$.

أحسب طويلة المحصلة و الزوايا التي تصنعها مع كل من OY, OX و OZ.

Exercice 2.4

a/ Montrer que la surface d'un parallélogramme est $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ tels que $|\vec{A}|$ et $|\vec{B}|$ sont les côtés du parallélogramme formé par les deux vecteurs .

التمرين:4.2

ا/ برهن أن مساحة متوازي الأضلاع هي $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ حيث $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ ضلعي متوازي

b/ Prouver que les vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires si $\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|$	الأضلاع المشكل من الشعاعين. ب/ برهن أن الشعاع $\vec{A}$ يكون عموديا على الشعاع $\vec{B}$ إذا تحققت العلاقة $\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|$

Exercice 2.5 Soit le vecteur : $\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$ Montrer que $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$	**التمرين5.2** إذا كان الشعاع: $\vec{V} = \left(2xy + z^3\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y\right)\vec{j} + \left(3xz^2 - 2\right)\vec{k}$ برهن أن $\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

Exercice 2.6 Soient les deux vecteurs $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Trouver α, β pour que $\vec{B}$ soit parallèle à $\vec{A}$, puis déterminer le vecteur unitaire pour chacun des deux vecteurs.	**التمرين6.2** ليكن الشعاعان $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ عين β,α بحيث يوازي الشعاع $\vec{B}$ الشعاع $\vec{A}$، ثم عين شعاعي الواحدة الموافقة لكل منهما.

Exercice 2.7 La résultante de deux vecteurs a 30 unités de long et forme avec eux des angles de 25° et 50°. Trouver la grandeur des deux vecteurs.	**التمرين7.2** محصلة شعاعين طولها 30 وحدة و تصنع معهما زاويتين °25 و °50. أوجد طويلة الشعاعين.



Corrigés des exercices 2.1 à 2.7 : حلول التمارين من 1.2 إلى 7.2

التمرين1.2 :

ا/ $\boxed{\vec{V_1}=6,40}$, $\boxed{\vec{V_2}=5,38}$, $\boxed{\vec{V_3}=5,91}$

ب/ $\boxed{\vec{A}=10\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}}$, $\boxed{\vec{B}=9\vec{i}-15\vec{j}+15\vec{k}}$

ج/ $\boxed{\vec{C}=8\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}}$ $\dfrac{\vec{C}}{C}=\vec{u}_c \Rightarrow \boxed{\vec{u}_c=\dfrac{8}{\sqrt{35}}\vec{i}-\dfrac{5}{\sqrt{35}}\vec{j}+\dfrac{7}{\sqrt{35}}\vec{k}}$

د/

$$\vec{V}_1.\vec{V}_3=x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_3=15+4+12 \ , \ \boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_3=31}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{V}_1.\vec{V}_3}{V_1V_3} \Rightarrow \quad \cos\alpha=\frac{31}{\sqrt{41}.\sqrt{35}}=\frac{31}{37,88} \ , \ cos\alpha \simeq 0,176 \Rightarrow \boxed{\alpha=79,86°}$$

ه/

$$\boxed{\vec{V_2}\wedge\vec{V}_3=5\vec{i}-26\vec{j}-17\vec{k}}$$

التمرين 2.2:

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix} \ ; \ \vec{B}=\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}$$

$$\vec{S}=\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x+B_x\right)\vec{i}+\left(A_y+B_y\right)\vec{j}+\left(A_z+B_z\right)\vec{k}$$

$$S=\left[\left(A_x+B_x\right)^2+\left(A_y+B_y\right)^2+\left(A_z+B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\left(A_x-B_x\right)\vec{i}+\left(A_y-B_y\right)\vec{j}+\left(A_z-B_z\right)\vec{k}$$

$$D=\left[\left(A_x-B_x\right)^2+\left(A_y-B_y\right)^2+\left(A_z-B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

التمرين 3.2:

$$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3 \ , \ \vec{V}=6\vec{i}+6\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow \boxed{V\simeq 8,54}$$

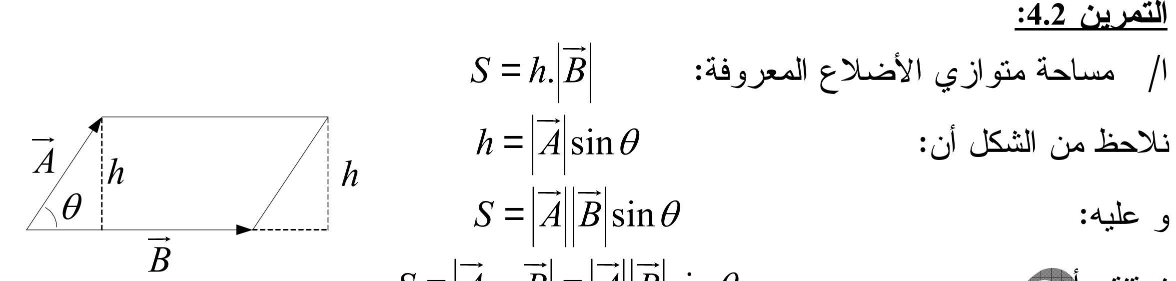
$$V_x=V.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{V_x}{V}=\frac{6}{8,54} \ , \ cos\alpha \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\alpha\simeq 45,6°}$$

$$V_y=V.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta=\frac{V_y}{V}=\frac{6}{8,54} \ , \ cos\beta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\beta\simeq 45,6°}$$

$$V_z = V.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{V_z}{V} = \frac{1}{8,54} \;,\; \cos\theta \simeq 0,70 \Rightarrow \boxed{\theta \simeq 83,1°}$$

التمرين 4.2:

ا/ مساحة متوازي الأضلاع المعروفة: $S = h.\left|\vec{B}\right|$



نلاحظ من الشكل أن: $h = \left|\vec{A}\right| \sin\theta$

و عليه: $S = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$

نستنتج أن: $S = \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$

لاحظ أن مساحة مثلث ضلعاه $\left|\vec{A}\right|$ و $\left|\vec{B}\right|$ تساوي $S_0 = \frac{1}{2}\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$

ب/ ليكن $\vec{A} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \;;\; \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2 \right]^{1/2}$$

نساوي بين العبارتين ، و بعد النشر نصل في النهاية على: $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$ و هذا هو بالضبط تعريف الجداء السلمي $\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$

التمرين 5.2:

نكتب عبارتي الشعاعين : $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 2y \\ 2xz^2 - 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

نقوم بالحساب فنجد أن الناتج هو الصفر. $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 2xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \vec{0}$

التمرين 6.2:

لكي يكون الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متوازيين يجب أن تتحقق العلاقة $\vec{B} = \lambda.\vec{A}$ بحيث λ ثابت.

و من هنا يمكن كتابة:

$$\frac{\vec{B}}{\lambda}=\vec{A}\Rightarrow \frac{\vec{B}}{\lambda}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\lambda}\\ \frac{-3}{\lambda}\\ \frac{4}{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

نستنتج قيمة λ و من ثمة قيمتي α و β :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{\lambda}=1\Rightarrow \boxed{\lambda=2}\\ \frac{-3}{\lambda}=\alpha\Rightarrow \boxed{\alpha=-1,5}\\ \frac{4}{\lambda}=\beta\Rightarrow \boxed{\beta=2}\end{array}\right|\Rightarrow \vec{B}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}\quad ;\quad \vec{A}=\begin{pmatrix}1\\ -1,5\\ 2\end{pmatrix}$$

يمكن التحقق من النتيجتين بحساب $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$

شعاع الواحدة الموافق لكل من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{A}=\vec{i}-1,5\vec{j}+2\vec{k}}\quad \frac{\vec{A}}{A}=\vec{u}_A\Rightarrow \boxed{\vec{u}_A=\frac{1}{\sqrt{7,25}}\vec{i}-\frac{1,5}{\sqrt{7,25}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{7,25}}\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{B}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}}\quad \frac{\vec{B}}{B}=\vec{u}_B\Rightarrow \boxed{\vec{u}_B=\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}}$$

التمرين 7.2:

نستنتج من المعطيات أن الزاوية بين الشعاعين هي: $180-(25+50)=105°$

يمكن لنا أن نطبق العلاقة 9.2 : $\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50}=\frac{V_y}{\sin 25}$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_x}{\sin 50}\Rightarrow \boxed{V_x=\frac{\sin 50}{\sin 105°}V}\Rightarrow \boxed{V_x=23,8}$$

$$\frac{V}{\sin 105°}=\frac{V_y}{\sin 25}\Rightarrow \boxed{V_y=\frac{\sin 25}{\sin 105°}V}\Rightarrow \boxed{V_y=13,1}$$

III/الأنظمة الرئيسية للإحداثيات
PRINCIPAUX SYSTEMES DE COORDONNEES

لتحديد الموضع اللحظي لنقطة مادية يجب تعيين معلم ملائم من بين المعالم المختلفة و الشائعة:

1/المعالم العطالية أو الغليلية: (repères d'inertie ou galiléens)

(نسبة إلى الفلكي الإيطالي غليلي 1564−1642):

لتحديد موقع أي متحرك في الفضاء نختار أولا جسما صلبا مرجعيا(نسميه المرجع) و الذي نشرك له محاور إحداثيات.

❖ **تعريف**: تشكل جملة كل أنظمة محاور إحداثيات مرتبطة بنفس الجسم الصلب S **المرجعي** (référentiel) ، **معلما** (repère) مرتبطا بالجسم الصلب S.

مثلا: الطاولة (مرجع) + 3محاور = معلم مرتبط بالطاولة.

الأرض (مرجع) +3 محاور مهما كان مبدؤها المشترك = معلم مرتبط بالأرض.

المعالم الغليلية تتكون من جملة حرة أي أنها في سكون أو في حركة مستقيمة منتظمة.

في مرجع R معرف، نعين موقعا نقطيا M بجملة ثلاث إحداثيات فضائية و إحداثية زمنية، و بالتالي فإن الموضع يتحدد برباعي أعداد حقيقية (X,Y,Z,t) مثلا، و هذا ما يحدد تماما موقع M فضائيا و زمنيا.

إذا رمزنا بـ$\vec{r}=\overrightarrow{OM}(x,y,z,t)$ لموضع النقطة M في اللحظة t فإن حركة M في المعلم R تعرّف بالتطبيق $t \mapsto \vec{r}(t)$.

2/أهم المراجع الغليلية:

❖ **معلم كوبرنيك**:(repère de Copernic) (نسبة إلى Copernic (1473-1543))

هذا المعلم معرف بثلاث محاور منطلقة من مركز عطالة المجموعة الشمسية و متجهة نحو ثلاث نجوم ثابتة مختارة بعناية (الشكل 1.3).

يستعمل هذا المعلم لدراسة حركة الكواكب و المركبات الفضائية العابرة للكواكب.

الأرض تدور حول القطب شمال-جنوب خلال يوم واحد و تدور حول الشمس خلال سنة.

❖ **المعلم الجيومركزي:** (repère géocentrique)

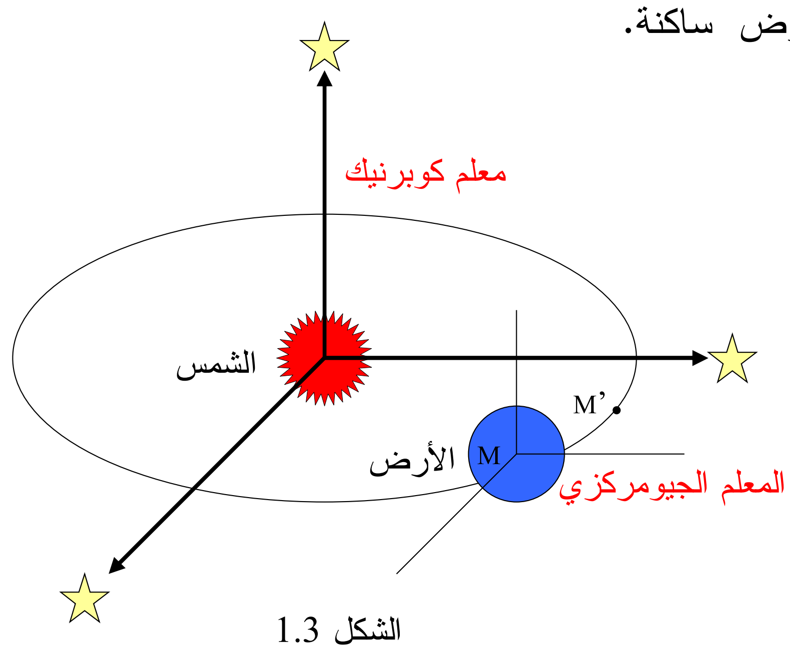
المعلم الجيومركزي معرف بثلاث محاور منطلقة من مركز عطالة الأرض ومتجهة نحو

ثلاث نجوم ثابتة لمعلم كوبرنيك. يستعمل هذا المعلم لدراسة حركة القمر و الأقمار الاصطناعية حول الأرض. الأرض تدور حول نفسها خلال 24ساعة.

❖ **المعلم الأرضي:** (repère terrestre)

هذا المعلم معرف بثلاث محاور منطلقة من أي نقطة من الأرض و هي متعامدة.

يستعمل هذا المعلم لدراسة الأجسام المتحركة المرتبطة بالأرض. في هذا المعلم الأرض ساكنة.



الشكل 1.3

3/ الإحداثيات الكارتيزية: (coordonnées cartésiennes)

ا/ **المعلم الفضائي:** (repère spatial)

إذا كانت الحركة فضائية، يمكن تحديد موضع المتحرك النقطي M في المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بشعاع موضعه $\overrightarrow{OM}$ أو بإحداثياته الكارتيزية أو الديكارتية (نسبة إلى René Descartes :1596-1650) أو المستطيلة و هي:

x: الفاصلة (abscisse)

y: الترتيب (ordonnée)

z: العلو (altitude)

الشكل 2.3: الإحداثيات الكارتيزية

يمكن كتابة شعاع موضع M بالشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}} \quad (1.3)$$

ب/ المعلم المستوي:(repère plan)

إذا كانت الحركة مستوية، يمكن تحديد موضع المتحرك النقطي M في المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل 3.3) بإحداثيتيه x و y أو بشعاع موضعه $\overrightarrow{OM}$:

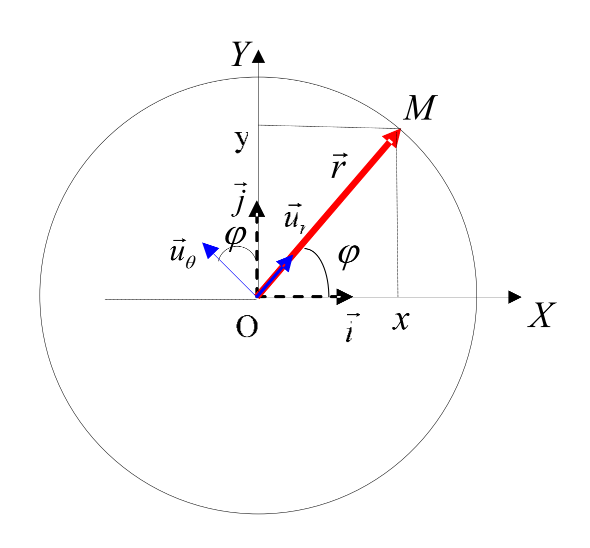
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}} \qquad (2.3)$$

حيث: x :الفاصلة و y : الترتيب

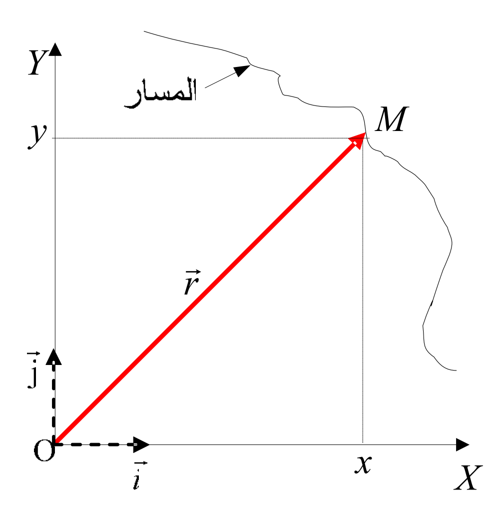
ج/ المعلم المستقيم: (repère rectiligne)

إذا كانت الحركة مستقيمة يمكن الاكتفاء بالمحور OX حيث نكتب :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i}} \qquad (3.3)$$



الشكل 4.3: الإحداثيات القطبية



الشكل 3.3: الإحداثيات المستطيلة

4/الإحداثيات القطبية: (coordonnées polaires)

حين ينتمي المسار إلى مستو، هنا كذلك، يمكن تعيين الموضع اللحظي للمتحرك M بالإحداثيتين القطبيتين (r,φ). (الشكل 4.3).

: نصف القطر القطبي (rayon polaire) و φ : الزاوية القطبية (angle polaire)

حيث يمكننا كتابة شعاع الموضع بالشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad (4.3)$$

بمثل ما حصلنا على العلاقة (8.2) يمكن كتابة:

$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$ و $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi$

و عليه يمكن كتابة شعاع الموضع في الإحداثيات القطبية على الشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi \quad (5.3)$$

حيث: (A_r, A_φ) هما مركبتا $\overrightarrow{OM}$ في القاعدة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

العلاقة بين الإحداثيات المستطيلة و الإحداثيات القطبية هي:

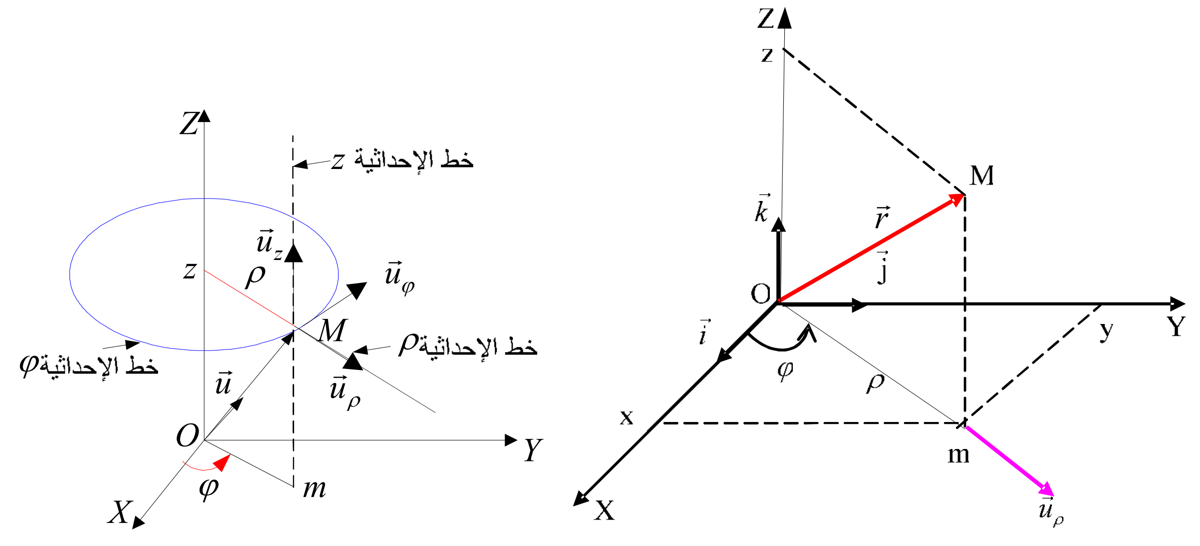
$$x = r.\cos\theta \qquad \varphi = \arccos x/r$$
$$y = r.\sin\theta \qquad \varphi = \arcsin y/r \quad (6.3)$$

5/ الإحداثيات الأسطوانية: (coordonnées cylindriques)

إذا كان المسار فضائيا حيث ρ و oz تلعبان دورا مميزا في تحديد موضع المتحرك، يستحسن استعمال الإحداثيات الأسطوانية (ρ, φ, z) حيث:

ρ : نصف القطر القطبي (rayon polaire) ، φ: الزاوية القطبية (om, ox) (angle polaire)

z : العلو (altitude)



الشكل 6.3: قاعدة الإحداثيات الأسطوانية

الشكل 5.3: الإحداثيات الأسطوانية

نتحقق من صحة الكتابة التالية: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r.\vec{u}$

$$\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{k} \quad (7.3)$$

من الشكل 5.3 نتحقق أن $\vec{u}_\rho = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi$

حذار من الخلط بين $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_r$. يمكننا الآن كتابة عبارة شعاع الموضع بالشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho\sin\varphi + \vec{k}.z$$
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}.x + \vec{j}.y + \vec{k}.z \qquad (8.3)$$

كما يمكن تحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ إلى الإحداثيات الأسطوانية حيث تكون على الشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_\rho.\vec{u}_\rho + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_z.\vec{u}_z \qquad (9.3)$$

حيث: $(A_\rho, A_\varphi, A_z = z)$ هي مركبات $\overrightarrow{OM}$ في القاعدة $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k})$. للحصول على عبارة شعاع الواحدة $\vec{u}_\varphi$ يكفي التنبه أن القاعدة $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z = \vec{k})$ متعامدة و عليه فإن $\vec{u}_\varphi$ هو الجداء الشعاعي بين $\vec{u}_z$ و $\vec{u}_\rho$. إذن:

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \qquad (10.3)$$

بمطابقة العبارتين (1.3) و (8.3) نستنتج العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية و الإحداثيات الأسطوانية:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg y / x \\ \varphi = \arccos x / \rho = \arcsin y / \rho \end{cases} \qquad (11.3)$$

ملاحظة: إذا كان $z = 0$ نتعرف على الإحداثيات القطبية.

6/ الإحداثيات الكروية : (coordonnées sphériques)

لما تقوم النقطة O و البعد عن O بدور مميز، فإن استعمال الإحداثيات الكروية (r, θ, φ) يصبح المفضل: حيث:

: نصف القطر القطبي:(rayon polaire)، θ: سمت، (azimut)، φ: تمام العرض (coaltitude).

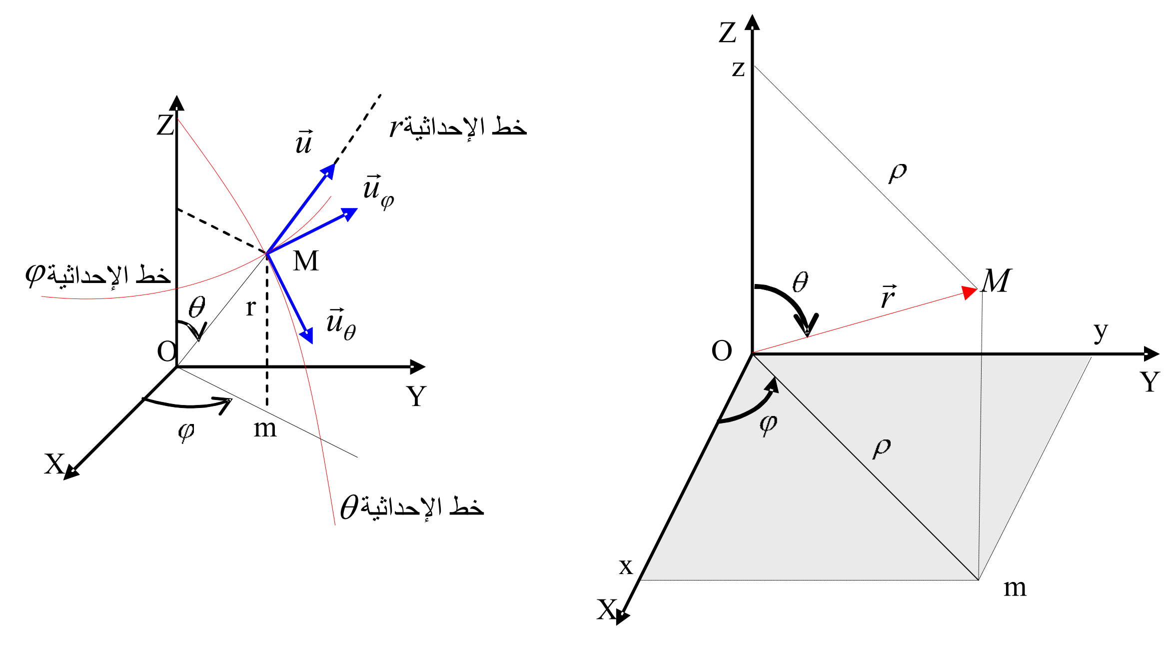
نتحقق هندسيا من العلاقات بين الإحداثيات الكارتيزية و الإحداثيات الكروية :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (12.3)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos z/r \\ \varphi = arctg\, y/x \end{cases} \quad (13.3)$$

أما العلاقة بين الإحداثيات الكروية و الإحداثيات الأسطوانية فهي:

$$\begin{array}{ll} \rho = r\sin\theta & r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \varphi = \varphi & \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta & \theta = arctg\, \rho/z \end{array} \quad (14.3)$$



الشكل 8.3 قاعدة الإحداثيات الكروية

الشكل 7.3: الإحداثيات الكروية

نكتب شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

أما في الإحداثيات الكروية فيكتب على الشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r.\vec{u}_r + A_\varphi.\vec{u}_\varphi + A_\theta.\vec{u}_\theta \quad (15.3)$$

حيث: $(A_r, A_\varphi, A_\theta)$ هي مركبات $\overrightarrow{OM}$ في القاعدة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$

ملاحظة: لتغطية كل الفراغ بالإحداثيات الكروية، نقبل تغير:

r من 0 إلى∞ ، θ من 0 إلى 2 π ، φ من 0 إلى π .

عبارات أشعة الواحدة: استنادا لكل ما سبق يمكننا كتابة:

$$\vec{r} = r.\vec{u}_r = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{Om} = \rho.\vec{u}_\rho = \rho\left[\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right]$$

$$\overrightarrow{mM} = z.\vec{k} = \vec{k}.r\cos\theta.$$

$$\rho = r.\sin\theta$$

و منه نستنتج: $\vec{r} = r\left[\vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta\right]$

يتجلى لنا شعاع الواحدة $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi.\sin\theta + \vec{j}.\sin\varphi.\sin\theta + \vec{k}.\cos\theta} \qquad (16.3)$$

نعرف الشعاع:

$$\boxed{\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi}$$

يبقى تعيين الشعاع $\vec{u}_\theta$، و بما أن القاعدة $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ متعامدة فإن شعاع الواحدة $\vec{u}_\theta$ هو حاصل الجداء الشعاعي بين $\vec{u}_\varphi$ و $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta} \qquad (17.3)$$

7/ الإحداثيات المنحنية:(coordonnées curvilignes)

يمكن لنا تحديد موضع المتحرك على المسار نفسه بما نسميه الفاصلةالمنحنية (abscisse curviligne):

- نوجه المسار اعتباطا
- نختار نقطة ثابتة O على المسار.



الشكل 9.3:معلم الإحداثيات المنحنية

تعرّف الإحداثية المنحنية بأنها المقدار الجبري s للقوس المنتمي للمسار من O إلى M:

$$\boxed{\overset{\frown}{OM} = s} \qquad (18.3)$$

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 3.1 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j})$ en coordonnées polaires $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}$	**التمرين 1.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j})$ إلى جملة الإحداثيات القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}$

Exercice 3.2 Convertir le vecteur suivant des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ en coordonnées cartésiennes: $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $\vec{A}=V_r\vec{u}_r+V_\theta\vec{u}_\theta+V_\varphi\vec{u}_\varphi$	**التمرين 2.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{A}=V_r\vec{u}_r+V_\theta\vec{u}_\theta+V_\varphi\vec{u}_\varphi$

Exercice 3.3 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ en coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_r\vec{u}_r+V_\varphi\vec{u}_\varphi+V_z\vec{u}_z$	**تمرين 3.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$ إلى جملة الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V}=V_r\vec{u}_r+V_\varphi\vec{u}_\varphi+V_z\vec{u}_z$

Exercice 3.4 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{i}+Z\vec{i}$	**تمرين 4.3** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{i}+Z\vec{i}$

Exercice 3.5 Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$	**التمرين 5.3:** حوّل عبارة الشعاع التالي من الإحداثيات الكارتيزية $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إلى جملة الإحداثيات الكروية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$: $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$

Exercice 3.6	**التمرين 6.3**
Convertir le vecteur suivant en coordonnées sphériques $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi\right)$: $\vec{A}=\rho^2.\vec{u}_\rho+\cos\varphi.\vec{u}_\varphi$	حوّل عبارة الشعاع التالي إلى الإحداثيات الكروية $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi\right)$: $\vec{A}=\rho^2.\vec{u}_\rho+\cos\varphi.\vec{u}_\varphi$

Exercice 3.7	**التمرين 7.3:**
Trouver la distance entre les deux points $M\left(\rho_M,\varphi_M,z_M\right)$ et $N\left(\rho_N,\varphi_N,z_N\right)$ par les deux méthodes : 1/ en convertissant l'expression du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en coordonnées cartésiennes. 2/ par le calcul direct. Montrer que la distance entre les points M et N s'écrit : $\left\Vert\overrightarrow{MN}\right\Vert=\sqrt{\rho_N^2+\rho_M^2+\left(z_N-z_M\right)^2-2\rho_N.\rho_M.\cos\left(\varphi_M-\varphi_N\right)}$	جد عبارة المسافة بين نقطتين $M\left(\rho_M,\varphi_M,z_M\right)$ و $N\left(\rho_N,\varphi_N,z_N\right)$ و ذلك بالطريقتين المختلفتين: 1/ بتحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى الإحداثيات الكارتيزية، 2/ بالحساب المباشر. بين أن المسافة بين النقطتين M و N تكتب بالشكل التالي: $\left\Vert\overrightarrow{MN}\right\Vert=\sqrt{\rho_N^2+\rho_M^2+\left(z_N-z_M\right)^2-2\rho_N.\rho_M.\cos\left(\varphi_M-\varphi_N\right)}$

Corrigés des exercices 3.1 à 3.7 — حلول التمارين من 1.3 إلى 7.3

التمرين 1.3:

إذا كانت عبارة الشعاع بالإحداثيات الكارتيزية $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

فإنه يمكن كتابة عبارة الشعاع بالإحداثيات القطبية بالشكل $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$. بمعرفتنا لعبارة كل من $\vec{u}$ و $\vec{u}_\varphi$ في القاعدة $(\vec{i},\vec{j})$ يمكن تحديد قيمة كل من V و V_φ.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\end{array}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

ننظم العبارة الأخيرة: $\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)$

و هكذا تتكون لنا جملة معادلتين ذات مجهولين V و V_φ: $\begin{cases}V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi = X \\ V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi = Y\end{cases}$

يمكن الوصول إلى قيمة V و V_φ باتباع الطريقة الجبرية العادية. نجد:

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \ ; \ \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

عبارة الشعاع $\vec{V}$ هي إذن: $\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$

لا بدّ أنك واجهت حسابات كثيرة بإتباعك الطريقة الجبرية المعتادة للحصول على النتيجتين السابقتين. يكون من السهل و الأسرع اللجوء إلى المصفوفات إذا كانت لديك دراية بها. نبيّن لك في ما يلي الطريقة.

من المرحلة التي تحصلنا فيها على المعادلتين:

$$X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$

الحل هو إنشاء مصفوفة انتقال: $\begin{bmatrix}X \\ Y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_r \\ V_\varphi\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}V_r \\ V_\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X \\ Y\end{bmatrix}$

النتيجة هي:

$$\boxed{V_r = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \ ; \ \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

عبارة الشعاع $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ بالإحداثيات القطبية هي إذن:

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_r + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi}$$

التمرين 2.3

يكتب الشعاع $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$ في القاعدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ على الشكل $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

نعرف عبارات أشعة الواحدة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ بدلالة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ و هي:

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

و منه:

$$\vec{V}=V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi+\vec{j}.\sin\theta\sin\varphi+\vec{k}.\cos\theta\right)+V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi+\vec{j}.\cos\theta\sin\varphi-\vec{k}.\sin\theta\right)+V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi+\vec{j}.\cos\varphi\right)$$

ننشر ثم ننظم المعادلة الأخيرة لنحصل على عبارة الشعاع بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\vec{V}=\vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi+V_\theta\cos\theta\cos\varphi+-V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right)+\vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi+V_\theta\cos\theta\sin\varphi+\cos\varphi}_{Y}\right)+\vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta-V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

تظهر لنا الإحداثيات الكارتيزية:

$$X=V_r\sin\theta\cos\varphi+V_\theta\cos\theta\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi$$
$$Y=V_r\sin\theta\sin\varphi+V_\theta\cos\theta\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi$$
$$Z=V_r\cos\theta-V_\theta\sin\theta$$

الشعاع $\vec{V}=V_r.\vec{u}_r+V_\theta.\vec{u}_\theta+V_\varphi.\vec{u}_\varphi$ يكتب في القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\vec{V}=\left(V_r\sin\theta\cos\varphi+V_\theta\cos\theta\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi\right)\vec{i}+\left(V_r\sin\theta\sin\varphi+V_\theta\cos\theta\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi\right)\vec{j}+\left(V_r\cos\theta-V_\theta\sin\theta\right)\vec{k}$$

تمرين 3.3:

يكتب الشعاع $\vec{V}$ في القاعدة $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ على الشكل: $\vec{V}=V_\rho.\vec{u}_\rho+V_\varphi.\vec{u}_\varphi+V_z.\vec{u}_z$

بمعرفة عبارات أشعة الواحدة $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ بدلالة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ نتمكن من كتابة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_\rho=\vec{i}.\cos\varphi+\vec{j}.\sin\varphi\\ \vec{u}_\varphi=-\vec{i}.\sin\varphi+\vec{j}.\cos\varphi\\ \vec{u}_z=\vec{k}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{V}=V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi+\vec{j}.\sin\varphi\right)+V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi+\vec{j}.\cos\varphi\right)+V_z\vec{k}$$

ننظم العبارة لتصبح: $\vec{V}=\vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right)+\vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right)+\underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$

تتكون لنا جملة ثلاث معادلات ذات ثلاث مجاهل V_ρ ، V_φ و V_z:

$$\begin{cases}X=V_r\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi\\ Y=V_r\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi\\ Z=V_z\end{cases}$$

عليك باختيارك الطريقة التي تتقنها للوصول إلى النتيجة المرجوة. إذا اخترت طريقة المصفوفات فالتحليل يكون كالتالي:

ننشئ مصفوفة انتقال انطلاقا من جملة المعادلات:

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\ \sin\varphi&\cos\varphi&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_\rho\\V_\varphi\\V_z\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}V_\rho\\V_\varphi\\V_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\ -\sin\varphi&\cos\varphi&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$$

النتيجة هي:

$$\boxed{V_\rho = X\cos\varphi + Y\sin\varphi} \;;\; \boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi} \;;\; \boxed{V_z = Z}$$

$$\boxed{\vec{V} = \left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\vec{u}_\rho + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi + Z\vec{u}_z}$$

تمرين 4.3:

يكتب الشعاع $\vec{V}$ في القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi\right)$ على الشكل: $\vec{V} = V_r.\vec{u}_r + V_\theta.\vec{u}_\theta + V_\varphi.\vec{u}_\varphi$

بمعرفة عبارات أشعة الواحدة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ بدلالة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi\right)$ نتمكن من كتابة:

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta$$
$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi$$

$$\vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}.\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}.\cos\theta\right) + V_\theta\left(\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}.\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}.\sin\theta\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right)$$

ننشر ثم ننظم المعادلة الأخيرة لنجد:

$$\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi + -V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi}_{Y}\right) + \vec{k}\left(\underbrace{V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta}_{Z}\right)$$

نكوّن جملة ثلاث معادلات ذات ثلاث مجاهل V_r ، V_θ و V_φ:

$$\begin{cases} X = V_r\sin\theta\cos\varphi + V_\theta\cos\theta\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi \\ Y = V_r\sin\theta\sin\varphi + V_\theta\cos\theta\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi \\ Z = V_r\cos\theta - V_\theta\sin\theta \end{cases}$$

عليك باختيارك الطريقة التي تتقنها للوصول إلى النتيجة المرجوة. إذا اخترت طريقة المصفوفات فالتحليل يكون كالتالي:

نشكل مصفوفة انتقال انطلاقا من جملة المعادلات:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

و النتيجة هي:

$$\boxed{V_r = X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta} \;;\; \boxed{V_\theta = X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta}$$

$$\boxed{V_\varphi = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi}$$

في الأخير عبارة الشعاع $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ بالإحداثيات الكروية هي:

$$\vec{V} = \left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi$$

التمرين 5.3

نبدأ بتحويل الشعاع $\vec{B} = \rho^2.\vec{u}_\rho + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$ إلى الإحداثيات الكارتيزية:

$$\vec{A} = \rho^2\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + \cos\varphi\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right)$$

ننشر المعادلة ثم ننظمها لنصل إلى عبارة الشعاع $\vec{A}$ بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\vec{A} = \vec{i}\left(\underbrace{\rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{\sin\varphi + \cos^2\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{0}_{Z}\vec{k}$$

$$X = \rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi \;;\; Y = \sin\varphi + \cos^2\varphi \;;\; Z = 0$$

علينا الآن تحويل هذه العبارة إلى الإحداثيات الكروية:

نستغل نتيجة التمرين **4.3**:

$$\vec{A} = \left(X\sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\theta\right)\vec{u}_r + \left(X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi\right)\vec{u}_\varphi$$

ما علينا الآن إلا تعويض X, Y, Z بقيمها المشار إليها أعلاه:

$$\begin{aligned}\vec{A} = &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\varphi + \left(\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_r + \\ &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi\right)\cos\theta\cos\varphi + \left(\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\theta\sin\varphi\right]\vec{u}_\theta + \\ &\left[\left(\rho^2.\cos\varphi + \cos\varphi.\sin\varphi\right) - \sin\varphi + \left(\sin\varphi + \cos^2\varphi\right)\cos\varphi\right]\vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

تمرين 6.3

الشعاع $\vec{V}$ في القاعدة $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ هو: $\vec{V} = V_\rho.\vec{u}_\rho + V_\varphi.\vec{u}_\varphi + V_z.\vec{u}_z$

بمعرفة عبارات أشعة الواحدة $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ بدلالة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ نتمكن من كتابة:

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= \vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{k}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{V} = V_r\left(\vec{i}.\cos\varphi + \vec{j}.\sin\varphi\right) + V_\varphi\left(-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}.\cos\varphi\right) + V_z\vec{k}$$

ننظم العبارة لتصبح: $\vec{V} = \vec{i}\left(\underbrace{V_\rho\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi}_{X}\right) + \vec{j}\left(\underbrace{V_\rho\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi}_{Y}\right) + \underbrace{V_z}_{Z}\vec{k}$

بمطابقة العبارتين نصل إلى:

$$X = V_r\cos\varphi - V_\varphi\sin\varphi$$

$$Y = V_r\sin\varphi + V_\varphi\cos\varphi$$

$$Z = V_z$$

النتيجة هي: $\boxed{\vec{V}=\vec{i}\left(V_r\cos\varphi-V_\varphi\sin\varphi\right)+\vec{j}\left(V_r\sin\varphi+V_\varphi\cos\varphi\right)+\vec{k}V_z}$

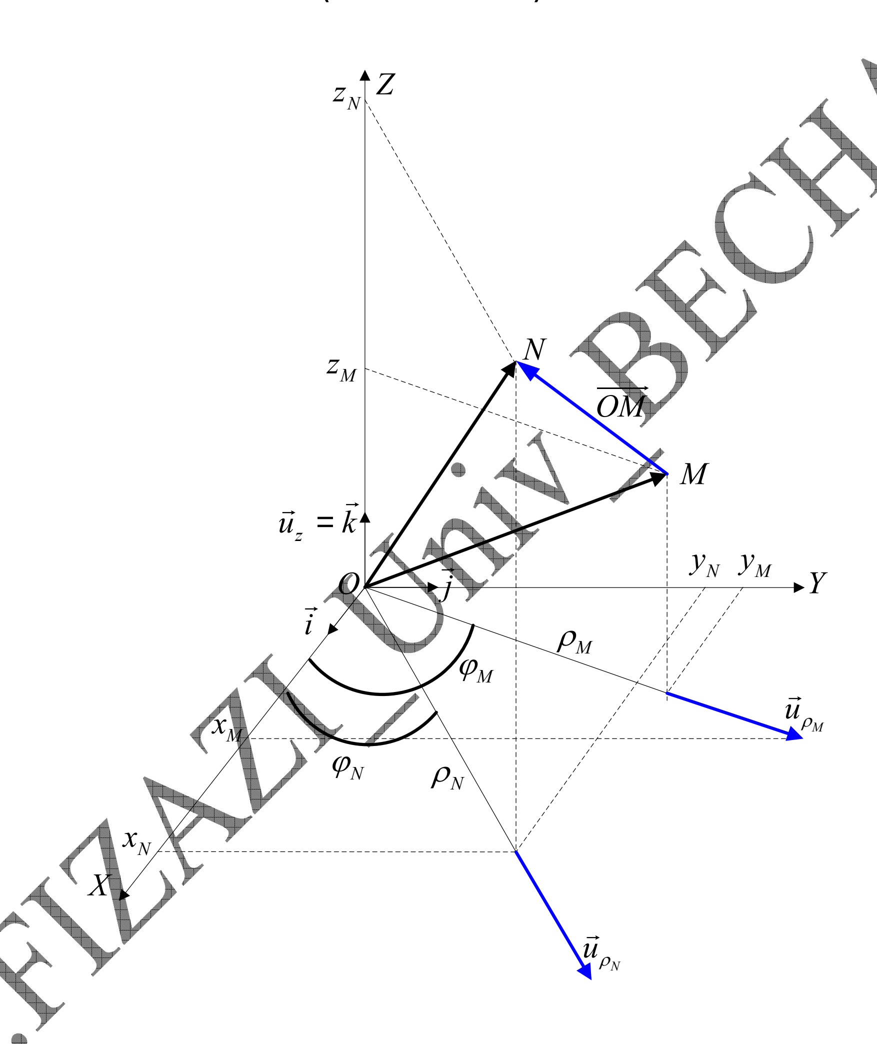
التمرين7.3:

1/ **الطريقة الأولى:** إيجاد المسافة بين النقطتين $M\left(\rho_M,\varphi_M,z_M\right)$ و $N\left(\rho_N,\varphi_N,z_N\right)$ بتحويل عبارة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ إلى الإحداثيات الكارتيزية.

يبيّن الشكل أن المسافة بين النقطتين M و N تساوي طويلة الشعاع $\overrightarrow{MN}$:

نلاحظ من الشكل أن: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N}+z_N\vec{u}_z\right)-\left(\rho_M\vec{u}_{\rho_M}+z_M\vec{u}_z\right)$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\rho_N\vec{u}_{\rho_N}-\rho_M\vec{u}_{\rho_M}\right)+\left(z_N\vec{u}_z-z_M\vec{u}_z\right)\to(1)$$



عبارات أشعة الواحدة $\vec{u}_{\rho_M},\vec{u}_{\rho_N}$ و $\vec{u}_z$ هي:

$$\vec{u}_{\rho_N}=\vec{i}.\cos\varphi_N+\vec{j}.\sin\varphi_N$$

$$\vec{u}_{\rho_M}=\vec{i}.\cos\varphi_M+\vec{j}.\sin\varphi_M$$

$$\vec{u}_z=\vec{k}$$

نعوض $\vec{u}_{\rho_M},\vec{u}_{\rho_N}$ في المعادلة (1):

$$\overrightarrow{MN}=\rho_N\left(\vec{i}.\cos\varphi_N+\vec{j}.\sin\varphi_N\right)-\rho_M\left(\vec{i}.\cos\varphi_M+\vec{j}.\sin\varphi_M\right)+\left(z_N\vec{u}_z-z_M\vec{u}_z\right)$$

ننظم المعادلة بحيث تصبح:

$$\overrightarrow{MN}=\left(\rho_N\cos\varphi_N-\rho_M\cos\varphi_M\right)\vec{i}+\left(\rho_N\sin\varphi_N-\rho_M\sin\varphi_M\right)\vec{j}+\left(z_N-z_M\right)\vec{k}$$

المسافة بين النقطتين M و N تساوي طويلة الشعاع $\overrightarrow{MN}$:

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\left(\rho_N \cos\varphi_N - \rho_M \cos\varphi_M\right)^2 + \left(\rho_N \sin\varphi_N - \rho_M \sin\varphi_M\right)^2 + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

بعد القيام بالحسابات اللازمة نجد:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N{}^2 + \rho_M{}^2 - \left[2\rho_N.\rho_M\left(\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M\right)\right] + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (2)$$

2/ **<u>الطريقة الثانية</u>:** إيجاد المسافة بين النقطتين $M\left(\rho_M, \varphi_M, z_M\right)$ و $N\left(\rho_N, \varphi_N, z_N\right)$ بالحساب المباشر:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} + z_N \vec{u}_z\right) - \left(\rho_M \vec{u}_{\rho_M} + z_M \vec{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\rho_N \vec{u}_{\rho_N} - \rho_M \vec{u}_{\rho_M}\right) + \left(z_N - z_M\right)\vec{u}_z$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N{}^2 + \rho_M{}^2 - 2\rho_N.\rho_M \cos(\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}) + \left(z_N - z_M\right)^2}$$

من الشكل نرى أن الزاوية بين شعاعي الواحدة $\vec{u}_{\rho_N}, \vec{u}_{\rho_M}$ تساوي $\varphi_N - \varphi_M$، إذن:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\rho_N{}^2 + \rho_M{}^2 - 2\rho_N.\rho_M \cos(\varphi_N - \varphi_M) + \left(z_N - z_M\right)^2}} \rightarrow (3)$$

حتى تكون النتيجتان (2) و (3) المتحصل عليهما بالطرقتين متوافقتين يكفي القيام بالتحويل المثلثي في المعادلة (2) حيث:

$$\cos\varphi_N.\cos\varphi_M - \sin\varphi_N.\sin\varphi_M = \cos\left(\varphi_N - \varphi_M\right) = \cos\left(\varphi_M - \varphi_N\right)$$

Français-Arabe * فرنسي-عربي /II

Français	عربية
A	
Abscisse	فاصلة
Absolu	مطلق
Accélération	تسارع
Action	فعل
Aire	مساحة
Algébrique	جبرية
Altitude	علو
Ampère	أمبير
Amplitude	سعة
Angle	زاوية
Angulaire	زاوي(ة)
Anneau	حلقة
Application	تطبيق
Arc cosinus	عكس جب التمام
Arc cotangente	عكس ظل التمام
Arc sinus	عكس جب
Arc tangente	عكس الظل
Artificiel	اصطناعي
Atmosphère	جو
axe	محور
Azimut	سمت
B	
Bar	بار
Baromètre	مقياس الضغط
Barre	قضيب ، ساق
Barycentre	مركز الكتلة
C	
Candela	قنديلة
Capacité	سعة
Caractéristique	مميزات
Cartésien	كارتيزي ، ديكارتي
Centre	مركز
Champ	حقل
Choc	صدم
Cinématique	علم الحركة
Cinétique	الحركية

Circulaire	دائري
Classification	تصنيف
Classique	تقليدي
Coaltitude	تمام العرض
Collision	اصطدام
Colonne	عمود
Communicant	موصلة
Composantes	مركبات
Compressible	متمدد
Condensateur	مكثفة
Conservation	انحفاظ
constante	ثابت(ة)
Contact	تلامس
Continuité	استمرارية
Convention	اصطلاح
Coordonnées	إحداثيات
Cosinus	جيب تمام
Cosmique	كوني
Cotangente	ظل تمام
Courbe	منحنى
Courbure	انحناء
Creux	مجوف
Curviligne	منحني
Cycloïde	لولبي
Cylindre	اسطوانة
D	
Degré	درجة
Degré centésimale ou Celsius	درجة مئوية أو سلسوس
Degré kelvin	درجة كلفينية
Densité	كثافة
Dérivant	مشتق
Dérivée	مشتقة
Diagonal	قطري
Diagramme	مخطط
Différentiel	تفاضل
Dimension	أبعاد
Discussion	مناقشة
Disque	قرص
Divergence	تباعد
Dynamique	علم التحريك

E	
Effectif	فعلي
Elastique	مرن
Electrostatique	كهروساكن ، كهرباء ساكنة
Elément	عنصر
Elongation	مطال
Energie	طاقة
Entraînement	جر
Equation	معادلة
Equilibre	توازن
Equiprojectif	متساوي الاسقاطات
Equiprojectivité	تساوي الاسقاطات
Erreur	خطأ
Espace	فضاء
Exercé	مطبق
Exponentiel	دالة أسية
Expression	عبارة
Extérieur	خارجي
F	
Figure	داخلي
Fluide	مائع
Fond	قعر
Fondamental	أساسي
Force	قوة
Frottement	احتكاك
G	
Galiléen	غاليلي
Gaz	غاز
Géométrique	هندسي
Giration	تدوير
Glissement	انزلاق
Gradient	تدرج
Grandeur	مقدار
Gravitation	دوراني
Gravitationnel	تدويري
H	
Harmonique	توافقي
hélicoïdal	حلزوني
Horaire	زمني
Horizontal	أفقي

Hydraulique	**مائي**
I	
Incertitude	**إرتياب**
Incliné	**مائل**
Incompressible	**عديم التمدد**
Inertie	**عطالة**
Initial	**ابتدائي**
Instantané	**لحظي ، آني**
Intensité	**شدة**
Intérieur	**داخلي**
Isolé(e)	**معزول(ة)**
K	
Kilogramme	**كيلوغرام**
L	
Liaison	**رابطة ، ربط**
liquide	**سائل**
Loi	**قانون**
Longueur	**طول**
Lumineuse	**ضوئية**
M	
Manomètre	**مانومتر**
Masse	**كتلة**
Matériel	**مادي**
Matière	**مادة**
Matrice	**مصفوفة**
Maximal	**أعظمي**
Mécanique	**ميكانيك**
Mesure	**قياس**
Mètre	**متر**
Mobile	**متحرك**
Module	**طويلة ، شدة ، مقياس**
Mole	**مول**
Moment	**عزم**
Mou	**لين**
Mouvement	**حركة**
Moyen	**متوسط**
Multiple	**مضاعف**
N	
Normale	**ناظمي**
Notion	**مفهوم**

Nutation	**ترنح أو كبو**
O	
Opérateur	**معامل**
Ordonnée	**ترتيب**
Oscillatoire	**اهتزازي**
P	
Parallèle	**موازي**
Paroi	**جدار**
Particule	**جسيمة**
particulier	**خاص**
Permittivité	**نفوذية**
Perpendiculaire	**متعامد ، عمودي**
Pesanteur	**جاذبية**
Phase	**طور ، صفحة**
Plan	**مستو**
Plane	**مصفح**
Plaque	**صفيحة**
Plein	**مصمت**
Point	**نقطة**
Polaire	**قطبية**
Position	**موضع، موقع**
Potentiel	**كمون**
Poussée	**دافعة**
Précession	**طواف أو مبادرة**
Presse	**مكبس**
Pression	**ضغط**
Principal	**رئيسية**
Principe	**مبدأ**
Produit	**جداء**
Projectile	**قذيفة**
Propre	**ذاتي**
Propriété	**خاصية**
Pseudo force	**شبه قوة**
Puissance	**استطاعة**
Pulsation	**نبض**
Q	
Quadratique	**تربيعي**
Quantité	**كمية**

R	
Rayon	نصف قطر
Réaction	رد الفعل
Rectangle	مستطيل
Rectiligne	مستقيم
Réduction	اختزال
Référentiel	مرجع
Relatif	نسبي
Relation	علاقة
remarque	تنبيه
Repère	معلم
repos	ساكن
Résultante	محصلة
Retardé	متباطئ
Rotation	دوران
Rotationnel	تدوير
Roulement	تدحرج ، دوران
S	
Satellite	قمر اصطناعي
Scalaire	سلمية
Secondaire	ثانوي
Seconde	ثانية
Simple	بسيط
Sinus	جيب
Sinusoïdal	جيبي
Solide	صلب
Somme	مجموع
Sous multiple	جزء
Sphère	كرة
Stabilité	استقرار
Statique	علم التوازن
Superposé	متراكب
Surface	سطح
Symétrie	تناظر
Système	نظام

T	
Tangente	ظل
Température	درجة الحرارة
Temps	زمن

Terrestre	**أرضي**
Théorème	**نظرية**
Tonneau	**برميل**
Torseur	**فتال أو نظام المتجهات**
Trajectoire	**مسار**
Translation	**انسحاب**
Travail	**عمل**
Tube	**أنبوب**
U	
Uniforme	**منتظم**
Unitaire	**واحدة**
Unité	**وحدة**
Universel	**العام**
V	
Variable	**متغير**
varié	**متغير**
Vase	**وعاء**
Vecteur	**شعاع ، متجه**
Vertical	**شاقولي**
Vitesse aréolaire	**سرعة المسح**
Volume	**حجم**
Volumique	**حجمي**

Arabe-Français * عربي- فرنسي /I

Français	عربية
	ا
instantané	آني
Initial	ابتدائي
Frottement	احتكاك
Coordonnées	إحداثيات
Réduction	اختزال
Terrestre	أرضي
Incertitude	إرتياب
Fondamental	أساسي
Puissance	استطاعة
Stabilité	استقرار
Continuité	استمرارية
Cylindre	اسطوانة
Collision	اصطدام
Convention	اصطلاح
Artificiel	اصطناعي
Maximal	أعظمي
Horizontal	أفقي
Cinétique	الحركية
Universel	العام
Ampère	أمبير
Tube	أنبوب
Conservation	انحفاظ
Courbure	انحناء
Glissement	انزلاق
Translation	انسحاب
Oscillatoire	اهتزازي
	ب
Bar	بار
Tonneau	برميل
Simple	بسيط
Dimension	بعد
	ت
Divergence	تباعد
Roulement	تدحرج ،(دوران)
Gradient	تدرج
Giration	تدوير

Rotationnel	تدوير
Gravitationnel	تدويري
Quadratique	تربيعي
Ordonnée	ترتيب
Nutation	ترنج أو كبو
Accélération	تسارع
Equiprojectivité	تساوي الاسقاطات
Classification	تصنيف
Application	تطبيق
Différentiel	تفاضل
Classique	تقليدي
Contact	تلامس
Coaltitude	تمام العرض
Symétrie	تناظر
Remarque	تنبيه
Equilibre	توازن
Harmonique	توافقي
ث	
Constant(e)	ثابت
Secondaire	ثانوي
Seconde	ثانية
ج	
Pesanteur	جاذبية
Algébrique	جبرية
Produit	جداء
Paroi	جدار
Entraînement	جر
Sous multiple	جزء
Particule	جسيمة
Atmosphère	جو
Sinus	جيب
Cosinus	جيب تمام
Sinusoïdal	جيبي
ح	
Volume	حجم
Volumique	حجمي
Mouvement	حركة
Champ	حقل
Hélicoïdal	حلزوني
Anneau	حلقة

خ	
Extérieur	خارجي
particulier	خاص
Propriété	خاصية
Erreur	خطأ
د	
Circulaire	دائري
Intérieur	داخلي
Poussée	دافعة
Exponentiel	دالة أسية
Degré	درجة
Température	درجة الحرارة
Degré kelvin	درجة كلفينية
Degré centésimale ou Celsius	درجة مئوية أو سلسوس
Rotation	دوران
Gravitation	دوراني
ذ	
Propre	ذاتي
ر	
Principal	رئيسية
Liaison	رابطة ، ربط
Réaction	رد الفعل
ز	
Angulaire	زاوي(ة)
Angle	زاوية
Temps	زمن
Horaire	زمني
س	
liquide	سائل
repos	ساكن
Vitesse aréolaire	سرعة المسح
Surface	سطح
Amplitude	سعة(مطال أعظمي)
Capacité	سعة(حالة مكثفة)
Scalaire	سلمية
permittivité	سماحية
Azimut	سمت
Vertical	شاقولي
ش	

Pseudo force	شبه قوة
Intensité	شدة
Vecteur	شعاع ، متجه
Figure	شكل
ص	
Choc	صدم
phase	صفحة أو طور
Plaque	صفيحة
Solide	صلب
ض	
Pression	ضغط
Lumineuse	ضوئية
ط	
Energie	طاقة
Précession	طواف أو مبادرة
Phase	طور ، صفحة
Longueur	طول
Module	طويلة ، شدة ، مقياس
ظ	
Tangente	ظل
Cotangente	ظل تمام
ع	
Expression	عبارة
Incompressible	عديم التمدد
Moment	عزم
Inertie	عطالة
Arc sinus	عكس الجيب
Arc tangente	عكس الظل
Arc cosinus	عكس جيب التمام
Arc cotangente	عكس ظل التمام
Relation	علاقة
Dynamique	علم التحريك
Statique	علم التوازن
Cinématique	علم الحركة
Altitude	علو
Travail	عمل
Colonne	عمود
Elément	عنصر
غ	

Gaz	غاز
Galiléen	غاليلي
	ف
Abscisse	فاصلة
Torseur	فتال أو نظام المتجهات
Espace	فضاء
Action	فعل
Effectif	فعلي
	ق
Loi	قانون
Projectile	قذيفة
Disque	قرص
Barre	قضيب ، ساق
Polaire	قطبية
Diagonal	قطري
Fond	قعر
Satellite	قمر اصطناعي
Candela	قنديلة
Force	قوة
Mesure	قياس
	ك
Cartésien	كارتيزي ، ديكارتي
Masse	كتلة
Densité	كثافة
Sphère	كرة
Potentiel	كمون
Quantité	كمية
Electrostatique	كهروساكن ، كهرباء ساكنة
Cosmique	كوني
Kilogramme	كيلوغرام
	ل
Instantané	لحظي ، آني
Cycloïde	لولبي
Mou	لين
	م
Fluide	مائع
Incliné	مائل
Hydraulique	مائي
Matière	مادة

Matériel	مادي
Manomètre	مانومتر
Principe	مبدأ
Retardé	متباطئ
Mobile	متحرك
vecteur	متجه
Mètre	متر
Superposé	متراكب
Equiprojectif	متساوي الاسقاطات
Perpendiculaire	متعامد ، عمودي
Variable	متغير
varié	متغير
Compressible	متمدد
Moyen	متوسط
Somme	مجموع
Creux	مجوف
Résultante	محصلة
axe	محور
Diagramme	مخطط
Référentiel	مرجع
Composantes	مركبات
Centre	مركز
Barycentre	مركز الكتلة
Elastique	مرن
Aire	مساحة
Trajectoire	مسار
Rectangle	مستطيل
Rectiligne	مستقيم
Plan	مستو
Dérivant	مشتق
Dérivée	مشتقة
Plane	مصفح
matrice	مصفوفة
Plein	مصمت
Multiple	مضاعف
Elongation	مطال
Exercé	مطبق
Absolu	مطلق
Equation	معادلة
Opérateur	معامل
Isolé	معزول

Repère	**معلم**
Notion	**مفهوم**
Grandeur	**مقدار**
Baromètre	**مقياس الضغط**
Presse	**مكبس**
Condensateur	**مكثفة**
Caractéristique	**مميز**
Discussion	**مناقشة**
Uniforme	**منتظم**
Courbe	**منحنى**
Curviligne	**منحني**
Parallèle	**موازي**
Communicant	**موصلة**
Position	**موضع، موقع**
Mole	**مول**
Mécanique	**ميكانيك**
ن	
Normale	**ناظمي**
Pulsation	**نبض**
Relatif	**نسبي**
Rayon	**نصف قطر**
Système	**نظام**
Théorème	**نظرية**
Permittivité	**نفوذية**
Point	**نقطة**
هـ	
Géométrique	**هندسي**
و	
Unitaire	**واحدة**
Unité	**وحدة**
Vase	**وعاء**

IV /علـــم الـــحـــركـــيـات
CINEMATIQUE

A-IV/مميزات الحركة
CARACTERISTIQUES DU MOUVEMENT

1/ تعريفان:

- علم الحركة أو حركيات النقطة المادية هي دراسة الحركة دون التعرض إلى المسببات (كالقوى مثلا.....).
- النقطة المادية هي كل جسم مادي يمكن اعتبار أبعاده معدومة نظريا و مهملة عمليا مقارنة بالمسافة المقطوعة.

2/ تمهيد:

الحركة و السكون مفهومان نسبيان: فالجبل ساكن بالنسبة للأرض و لكنه متحرك بالنسبة لمراقب بعيد عن الأرض و الذي يرى الكرة الأرضية و كل ما عليها في حركة.

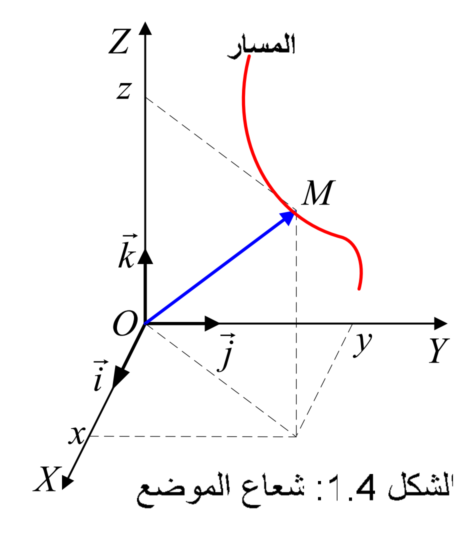
يجب على الدارس لأي حركة تعيين نظام مرجعي (معلم) و الذي تحلل الحركة بالنسبة له. تتم هذه الدراسة على أحد الشكلين:

- شعاعي : باستخدام أشعة الموضع $\overrightarrow{OM}$، السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$
- جبري : بتحديد معادلة الحركة وفق مسار معيّن.

3/ موضع المتحرك:(position du mobile)

❖ شعاع الموضع:(vecteur position)

يعرف موضع نقطة مادية M في اللحظة t في معلم فضائي كارتيزي $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (الشكل 1.4) بشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$:



الشكل 1.4: شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \qquad (1.4)$$

❖ **المعادلات الزمنية**:(équations horaires)

تكون النقطة M في سكون (repos) إذا كانت الإحداثيات x, y, z مستقلة عن الزمن، و تكون في حركة (mouvement) إذا أصبحت هذه الإحداثيات توابع للزمن.
ونرمز لها بـ:

$$\boxed{x(t), y(t), z(t)} \qquad (2.4)$$

نسمي هذه الدوال المعادلات الزمنية للحركة و يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$\boxed{x = f(t), y = g(t), z = h(t)} \qquad (3.4)$$

❖ **المسار**:(trajectoire)

مسار نقطة مادية هو مجموع المواضع المتتالية التي احتلتها خلال أزمنة متعاقبة.
يمكن للمسار أن يكون ماديا (الطريق) أو وهميا (مسار القمر).
دراسة الحركة المستوية تتم بالإحداثيات المستطيلة في المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث يصبح الموضع معرف بإحداثيتين هما: $x(t), y(t)$.

الدالة $x \mapsto y(x)$ تسمى المعادلة الكارتيزية للمسار.(équation cartésienne de la trajectoire)

<u>نحصل على معادلة المسار بحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين</u>.

<u>مثال1.4</u>: المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية قذفت في الفضاء هي:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t \end{cases}$$

(كل الوحدات في الجملة الدولية).
1/أوجد المعادلة الكارتيزية للمسار، ما شكله؟
2/ أكتب عبارة شعاع الموضع في اللحظة $t = 2s$.

<u>الجواب</u>: 1/ نستخرج الزمن بدلالة x ثم نعوض في عبارة z فنحصل على معادلة المسار و هو عبارة عن قطع مكافئ.

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$z = -1.25.x^2 + 2.x$$

2/عبارة شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{OM} = (2t).\vec{i} + (-5t^2 + 4t).\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}$$

<u>مثال 2.4</u>: إذا كانت حركة نقطة مادية معرفة في المعلم الديكارتي بالمعادلتين الزمنيتين:

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)$$
$$y = a\cos(\omega t + \varphi)$$

فما هو شكل المسار المتبع؟

الجواب: نربع المعادلتين ثم نجمعهما طرف لطرف فنحصل على معادلة دائرة نصف قطرها a:

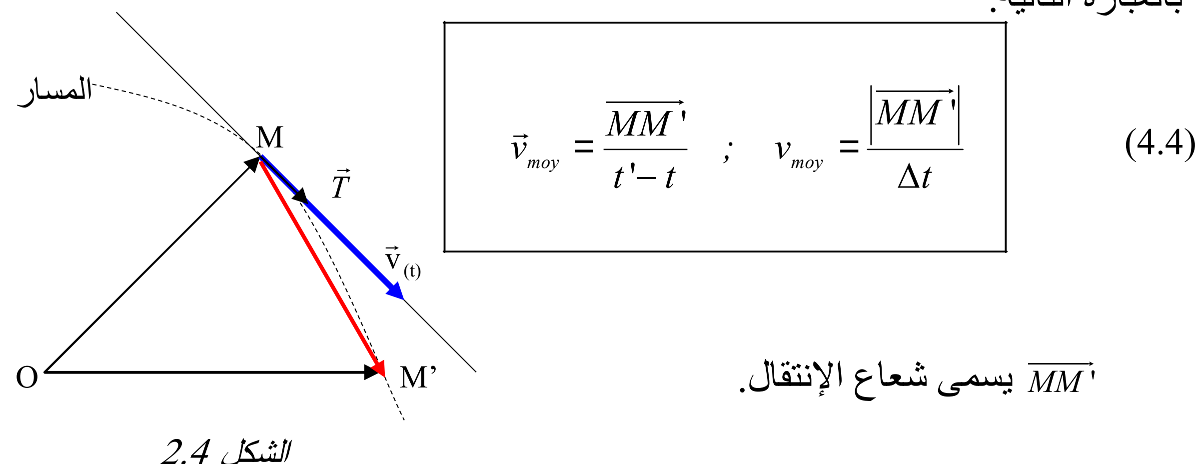
$$\left.\begin{array}{l} x^2 = a^2\sin^2(\omega.t + \varphi) \\ y^2 = a^2\cos^2(\omega.t + \varphi) \end{array}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

4 / شعاع السرعة: (vecteur vitesse)

نعتبر أن السرعة هي المسافة المقطوعة خلال وحدة الزمن.

❖ **شعاع السرعة المتوسطة:** (vecteur vitesse moyenne)

نلاحظ الشكل 2.4 : بين اللحظة t التي يشغل فيها المتحرك الموضع M و اللحظة t' التي يشغل فيها المتحرك الموضع M' فإن شعاع السرعة المتوسطة معرف بالعبارة التالية:



$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} \quad ; \quad v_{moy} = \frac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta t} \qquad (4.4)$$

$\overrightarrow{MM'}$ يسمى شعاع الإنتقال.

الشكل 2.4

❖ **شعاع السرعة اللحظية:** (vecteur vitesse instantanée)

يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t، أنه **مشتقة** (dérivée) شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

$$\vec{v}_t = \lim_{t\to t'} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t - t'} = \lim_{t'\to t} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \boxed{\vec{v}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \qquad (5.4)$$

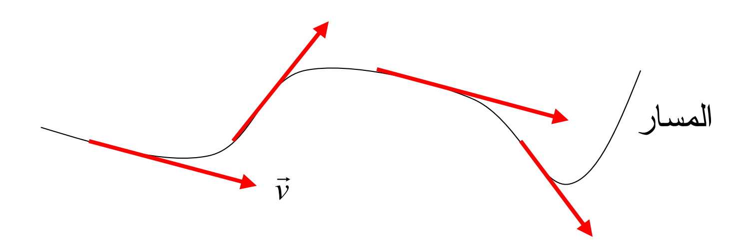
❖ **مصطلحات:**

هام: شعاع السرعة $\vec{v}_{(t)}$ يحمله المماس للمسار في النقطة M و موجه دائما نحو اتجاه الحركة (الشكل 3.4).

في المعلم الكرتيزي نستنتج العبارة الشعاعية للسرعة من العبارة الشعاعية للموضع و

ذلك بعملية اشتقاق:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} \quad (6.4)$$



الشكل3.4: شعاع السرعة اللحظية

مصطلحات:(conventions)

- **ترميز نيوتن**(Newton): نرمز إلى المشتقة بالنسبة للزمن بوضع نقطة على الحرف الذي يرمز إلى المتغير. أما إذا كانت المشتقة بالنسبة لأي متغير آخر فإن الرمز هو وضع العلامة ' بعد الحرف الذي يرمز إلى المتغير.
- **ترميز ليبنيتز** (Leibnitz): نرمز إلى مشتقة المتغير y بالنسبة للزمن بـــ: $\frac{dy}{dt}$. و هكذا يمكننا أن نكتب: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$

شدة شعاع السرعة اللحظية: (module du vecteur vitesse instantanée)

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (7.4)$$

وحدة السرعة في الجملة الدولية MKS هي: $m/s = m.s^{-1}$

إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}$:

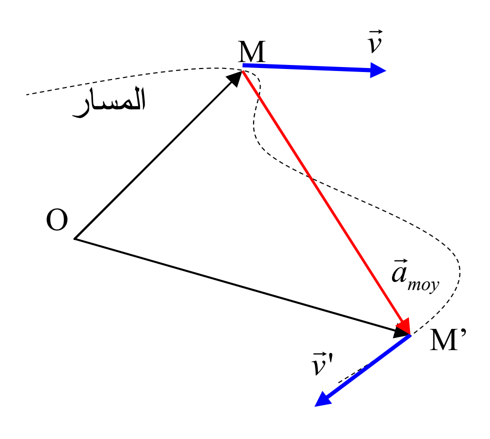
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R$$

5/ شعاع التسارع:(vecteur accélération)

نعتبر التسارع مقدار تغير السرعة خلال وحدة الزمن.

شعاع التسارع المتوسط:(vecteur accélération moyenne)

إذا اعتبرنا لحظتين مختلفتين t و t' المناسبتين لشعاعي الموضع $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ و شعاعي السرعة اللحظية $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ (الشكل 4.4) فإن شعاع التسارع المتوسط معرف بالعبارة:



$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \quad a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \qquad (8.4)$$

الشكل 4.4

❖ **شعاع التسارع اللحظي:** (vecteur accélération instantanée)

شعاع التسارع اللحظي لحركة ما يعرّف أنه مشتقة شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن:

$$\vec{a} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \lim_{t' - t} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

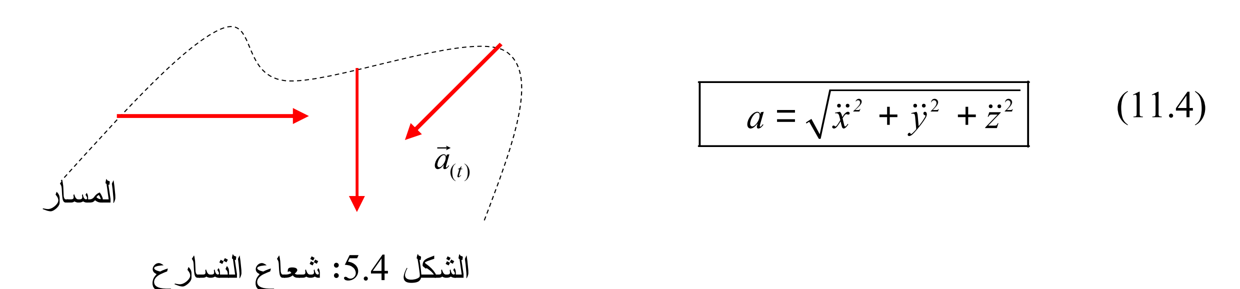
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad (9.4)$$

يمكن الآن كتابة العبارة الجامعة للعلاقات بين مختلف الأشعة المميزة للحركة بترميزي كل من نيوتن و ليبنيتز:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}.i + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k} \qquad (10.4)$$

هام: يكون شعاع التسارع موجها دائما نحو تقعر المسار (الشكل 5.4).



$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (11.4)$$

الشكل 5.4: شعاع التسارع

طويلة شعاع التسارع اللحظي: (module du vecteur accélération instantanée)

تحسب شدة أو طويلة شعاع التسارع بواسطة العبارة (11.4):

الخلاصة: في معلم ديكارتي يمكن كتابة:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{a} \begin{pmatrix} \ddot{x} = \dot{v}_x = a_x \\ \ddot{y} = \dot{v}_y = a_y \\ \ddot{z} = \dot{v}_z = a_z \end{pmatrix}_R \qquad (12.4)$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \rightarrow \vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k} \rightarrow \vec{a} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}$$

تنبيه: تكون الحركة **متسارعة** إذا كان $\vec{a}.\vec{v} \succ 0$ و **متباطئة** إذا كان $\vec{a}.\vec{v} \prec 0$. أما اتجاه الحركة فيدلّ عليه اتجاه شعاع السرعة $\vec{v}$.

مثال3.4: إذا كان شعاع الموضع هو $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{pmatrix}$. إستنتج شعاع السرعة و شعاع التسارع اللحظيين ثم أحسب شدة كل منهما.

الجواب: نقوم بعمليتي اشتقاق متتاليتين فنصل إلى النتيجتين:

$$\vec{v} = 4t.\vec{i} + 4\vec{j} + 3t^2\vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$v = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4} \quad , \quad a = \sqrt{16 + 36t^2}$$

EXERCICES ** تـــمــــاريـــن

Exercice 4.1

Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire : $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$.

a/ Calculer la vitesse et l'accélération à la date t.

b/ Etudier le mouvement du point lorsque t croît de 0 à $+\infty$.(Dire dans quel sens se déplace le point et si le mouvement est accéléré ou retardé).

التمرين1.4

الحركة المستقيمة لنقطة مادية محددة بالمعادلة الزمنية: $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$

ا/ أحسب السرعة و التسارع في اللحظة t.

ب/ أدرس حركة النقطة لمّا يزداد الزمن t من 0 إلى $+\infty$.(وضّح في أي اتجاه تنتقل النقطة و هل الحركة متسارعة أو متباطئة).

Exercice 4.2

Déterminer la trajectoire du mouvement plan défini par les équations :

$$x = \sin^2 t \;\; ; \;\; y = 1 + \cos 2t$$

Dessiner cette trajectoire dans le repère Oxy.

التمرين:2.4

عيّن مسار الحركة المستوية المعرّفة بالمعادلتين: $x = \sin^2 t \;\; ; \;\; y = 1 + \cos 2t$.

أرسم هذا المسار في المعلم Oxy .

Exercice 4.3

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le mouvement d'un mobile M est défini par les équations suivantes : $x = t^3 - 3t \;\; ; \;\; y = -3t^2 \;\; ; \;\; z = t^3 + 3t$

a/ Calculer les coordonnées à la date t, du vecteur vitesse $\vec{v}$, et celles du vecteur accélération $\vec{a}$, du mobile M.

b/ Calculer la norme du vecteur $\vec{v}$ et montrer que ce vecteur fait un angle constant avec Oz.

تمرين3.4:

في معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$، تحدّد الحركة لمتحرّك M بالمعادلات التالية:

$$x = t^3 - 3t \;\; ; \;\; y = -3t^2 \;\; ; \;\; z = t^3 + 3t$$

ا/ أحسب في اللحظة t إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ ، و شعاع التسارع $\vec{a}$ ، للمتحرّك M .

ب/ أحسب طويلة الشعاع $\vec{v}$ و بيّن أن هذا الشعاع يصنع زاوية ثابتة مع Oz .

Exercice4.4

Un point est mobile dans le plan à partir de la date $t = 1$. Ses équations horaires sont :

$$x = \ln t \;\; ; \;\; y = t + \frac{1}{t}.$$

a/Ecrire l'équation de la trajectoire.

b/ Calculer les valeurs algébriques de la vitesse et de l'accélération au temps t.

تمرين 4.4:

تنتقل نقطة في مستوى ابتداء من اللحظة $t = 1$. معادلتاه الزمنيتان هما:

$$x = \ln t \;\; ; \;\; y = t + \frac{1}{t}$$

ا/ أكتب معادلة المسار.

ب/ أحسب القيم الجبرية للسرعة و التسارع في اللحظة t.

Exercice 4.5

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, un mobile M décrit dans le sens direct l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,.Le point M est repéré sur l'ellipse par l'angle φ.

Déterminer les vecteurs vitesse et accélération $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ en fonction des dérivées $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$.

التمرين5.4:

في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\right)$، يرسم متحرّك في الاتجاه المباشر نصف قطع زائد معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. تعيّن النقطة M على القطع الزائد بالزاوية φ. حدّد شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{\gamma}$ بدلالة المشتقتين $\dot{\varphi}$ و $\ddot{\varphi}$.

Exercice 4.6

Soit dans un plan (P), un repère orthonormé xOy et un mobile M se déplaçant dans ce plan. A la date t , ses coordonnées sont définies par :

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\ ;\ y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

a/ Quelle est la trajectoire ?

b/ Calculer les coordonnées à la date t du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ de ce mobile. Quelle relation y a- t- il entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{a}$? Au bout de combien de temps le mobile repasse-il par une même position sur la courbe ?

c/ Entre les dates $t_1=0$ et $t_2=4\pi$, déterminer les positions du mobile et les coordonnées de $\vec{v}$ pour avoir un vecteur accélération de longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

التمرين 6.4:

ليكن في مستوى (P)، معلم متعامد و متجانس xOy و متحرّك M ينتقل في هذا المستوى. في اللحظة t ، إحداثياته معرفتان بــ:

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\ ;\ y=2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

ا/ما هو مساره؟

ب/ أحسب إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ لهذا المتحرّك في اللحظة t. ما هي العلاقة الموجودة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{a}$ ؟ ما هي المدة اللازمة حتى يمرّ المتحرك من نفس الموضع من المنحنى ؟

ج/ بين اللحظتين $t_1=0$ و $t_2=4\pi$ ، حدّد مواقع المتحرّك و كذا إحداثيتي $\vec{v}$ حتى تكون طويلة التسارع $\frac{\sqrt{5}}{4}$.



Corrigés des exercices 4.1 à 4.7 حلول التمارين من 1.4 إلى 7.4

التمرين 1.4:

1/ لحساب السرعة يكفي اشتقاق المعادلة الزمنية بالنسبة للزمن: $\boxed{v = \dfrac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12}$

باشتقاق السرعة بالنسبة للزمن نحصل على التسارع: $\boxed{a = \dfrac{dv}{dt} = 12t - 18}$

2/ دراسة حركة المتحرّك تتطلّب القيام بدراسة رياضية للدّالة $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$. تكون الحركة متسارعة أو متباطئة حسب إشارة الجداء av. أما الاتجاه فتدلّ عليه إشارة v.
نقيم جدول التغيرات:

$v = 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1 \;;\; t=2 \qquad ; \qquad a = 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1,5$

t	0 … 1	1 … 1,5	1,5 … 2	2 … ∞
v	+	0 −	−	0 +
a	−	−	0 +	+
$a.v$	−	+	−	+
الحركة	متباطئة الإتجاه+	متسارعة الإتجاه−	متباطئة الإتجاه−	متسارعة الإتجاه+

التمرين 2.4:

نبدأ بتحويل مثلثي: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$،
نعوض في عبارة y لتصبح: $y = 2\cos^2 t$،
تحويل مثلثي آخر يقودنا إلى: $y = 2\left(\sin^2 t - 1\right)$،
و ما علينا الآن إلا أن نعوّض $\sin^2 t$ بـــ x فنحصل على معادلة المسار و هي $\boxed{y = 2(1-x)}$.

لرسم المسار يجب الانتباه إلى أن $0 \le x \le +1$ لأن $0 \le \sin^2 t = x \le +1$ ، و هذا مهما كانت t. و عليه فإن المسار هو قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(+1,0)$ و $B(0,+2)$.

التمرين 3.4:

1/ إشتقاقان متتاليان للمعادلات الزمنية تؤدي بنا إلى عبارات الإحداثيات للمتحرك في اللحظة t:

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = 3\left(t^2 - 1\right) \\ v_y = \dot{y} = -6t \\ v_z = \dot{z} = 3\left(t^2 + 1\right) \end{cases} \quad ; \quad \vec{a} = \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 6t \\ a_y = \ddot{y} = -6 \\ a_z = \ddot{z} = 6t \end{cases}$$

2/ طويلة شعاع السرعة تساوي: $\boxed{v = 3\sqrt{2}\left(1 + t^2\right)}$ $\Leftarrow$ $v^2 = 18\left(1 + t^2\right)^2$

نحسب الآن الزاوية بين $\vec{v}$ و Oz . من أجل هذا نقوم بحساب طويلة الجداء السلمي:

$$\vec{v}.\vec{k} = v.k.\cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = v.cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) \quad , \quad cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}.\,\vec{k} = (\dot{x}.0)+(\dot{y}.0)+(\dot{z}.0) = 3\left(1+t^2\right)$$

$$cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v} = \frac{3\left(1+t^2\right)}{3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)} \Rightarrow cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{v},Oz\right) = \frac{\pi}{4} rad}$$

التمرين4.4:

ا/ نحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين لنحصل على معادلة المسار:

$$x = \ln t \Rightarrow t = e^x$$

$$y = e^x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow \boxed{y = e^x + e^{-x}}$$

ب/ نحسب شدتي السرعة و التسارع في اللحظة t :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{t} \\ v_y &= 1-\frac{1}{t^2} \end{aligned}\right| \Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + 1}}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -\frac{1}{t^2} \\ a_y &= \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} \end{aligned}\right| \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{a = \sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{1}{t^4}}}$$

التمرين5.4:

تذكير رياضي خاص بالقطع الناقص: انطلاقا من الشكل المقابل:

معادلة الدائرة $x^2 + y^2 - a^2 = 0 \rightarrow (1)$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \rightarrow (2)$

إحداثيتا النقطة M : $x_1 = a\cos\varphi$ ، $y_1 = a\sin\varphi$

نعوض في (1)

$$\forall M, \quad a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi - a^2 = 0 \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0 \rightarrow (3)$$

نطابق المعادلتين(2),(3) لنحصل على علاقتين هامتين تخصان القطع الناقص

$$(2) = (3) : \cos\varphi = \frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = acos\varphi} \quad , \quad sin\varphi = \frac{y}{b} \Rightarrow \boxed{y = bsin\varphi}$$

نعين النقطة M على القطع الناقص بالزاوية φ حيث: $\cos\varphi = \frac{x}{a} \quad ; \quad sin\varphi = \frac{y}{b}$

سرعة النقطة M :

$$\overrightarrow{OM} = a\cos\varphi.\vec{i} + b\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi.\vec{i} + b\dot{\varphi}\cos\varphi.\vec{j}}$$

تسارع النقطة M : $\boxed{\vec{\gamma} = -a\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).\vec{i} + b\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).\vec{j}}$

<u>التمرين 6.4:</u>

1/ للحصول على مسار الحركة نحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\dfrac{t}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}\\[2ex] \sin\dfrac{t}{2} = \dfrac{y}{2\sqrt{2}}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1}$$

إذن المسار هو **قطع ناقص**.

2/ نشتق المعادلتين الزمنيتين بالنسبة للزمن فنحصل على مركبتي شعاع السرعة:

$$\vec{v}_x = \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\vec{v}_y = \dot{y} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$$

نشتق الآن السرعة بالنسبة للزمن فنحصل على مركبتي شعاع التسارع:

$$\vec{a}_x = \dot{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{t}{2}$$

$$\vec{a}_y = \dot{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

نكتب الآن العبارة الشعاعية للتسارع لنجد العلاقة بينه و بين شعاع الموضع:

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}x.\vec{i} - -\frac{1}{4}y.\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{4}\left(x.\vec{i} - y.\vec{j}\right) \quad ; \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}}$$

ما دام المسار قطع ناقص فإن الحركة تتكرر إلى ما لا نهاية من أجل تغير للزمن بين 0 و ∞.

لتكن T المدة الزمنية الفاصلة بين مرورين متتالين للمتحرك M من نفس الموضع.

فاصلة المتحرك في اللحظة t: $\quad x = \sqrt{2}\cos\dfrac{t}{2}$

فاصلة المتحرك في اللحظة $t+T$: $\quad x' = \sqrt{2}\cos\dfrac{(t+T)}{2}$

يجب أن تكون $x = x'$ ، و عليه:

$$cos\alpha = cos\left(\alpha + 2\pi\right) \quad ; \quad \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{(t+T)}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 4\pi}$$

3/ مواضع المتحرك و إحداثيات السرعة من أجل تسارع طويلته $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$:

نحسب اللحظة التي تكون فيها $a = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$:

$$a^2 = \frac{2}{16}\cos^2\frac{t}{2} + \frac{2}{4}\sin^2\frac{t}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow 2\cos^2\frac{t}{2} + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5$$

$$2\left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right) + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5 \Rightarrow 6\sin^2\frac{t}{2} = 3 \Rightarrow \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

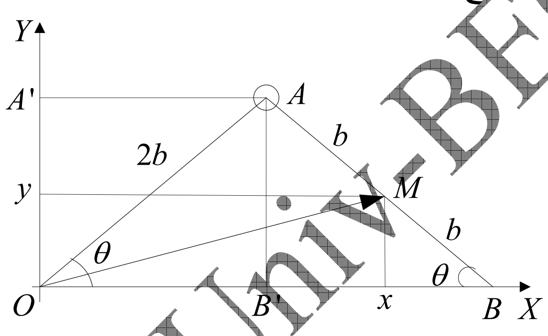
$$\sin\frac{t}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; t \succ 0 \;;\; \frac{t}{2} = \begin{vmatrix} +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ +\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{vmatrix}$$

نأخذ بعين الاعتبار الشرط $0 \le t \le 4\pi$ ، و نحصر النتائج في الجدول التالي:

k	t	x	y	v_x	v_y
0	$\frac{\pi}{2}$	+1	+2	$-\frac{1}{2}$	+1
1	$\frac{3\pi}{2}$	−1	+2	$-\frac{1}{2}$	−1

التمرين 7.4:

1/ نبدأ بتعين عبارة شعاع الموضع مستعينين بالشكل أسفله: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



يبقى الآن تحديد المعادلتين الزمنيتين أي التعبير عن الإحداثيتين بدلالة الزمن:

$$x = \overline{OA} + b\cos\varphi \;,\; x = 2b\cos\varphi + b\cos\varphi \Rightarrow \; x = 3b\cos\varphi$$

$$y = \overline{AA'} - b\sin\varphi \;,\; y = 2b\sin\varphi - b\sin\varphi \; \Rightarrow y = b\sin\varphi$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}.3b\cos\varphi + \vec{j}.b\sin\varphi}$$

نستنتج معادلة المسار بحذف الزمن ما بين المعادلتين:

$$\begin{vmatrix} x^2 = 9b^2\cos^2\varphi \\ y^2 = b^2\sin^2\varphi \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9b} = \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

المسار قطع ناقص.

2/ المشتقة الثانية لشعاع الموضع بالنسبة للزمن تؤدي بنا إلى عبارة شعاع التسارع:

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \omega^2\left(\vec{i}.3b.\cos\omega t + \vec{j}.b.\sin\omega t\right) \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

أمّا طويلة شعاع التسارع فهي: $a = 9b^2.\cos^2\omega t + b^2.\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{a = b\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}}$

B-IV/ الحركات المستقيمة
MOUVEMENTS RECTILIGNES

1/الحركة المستقيمة المنتظمة: (mouvement rectiligne uniforme)

تعريف: تكون نقطة مادية في حركة مستقيمة منتظمة إذا كان مسارها مستقيما و شعاع سرعتها ثابتا و بالتالي فإن شعاع تسارعها معدوم.

❖ **المعادلة الزمنية**: نختار المحور OX كمعلم، و نحدد الشرط الابتدائي:

$$t=0\ ;\ x=x_0$$

انطلاقا من تعريف السرعة و بعملية تكاملية نصل إلى عبارة الفاصلة X بدلالة الزمن:

$$v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=v_0 \Rightarrow dx=v_0.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0}^{t} v_0.dt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x}=v_0 t\Big|_0^t \quad \Rightarrow x\text{-}x_0=v_0 t$$

في آخر خطوة نحصل على المعادلة الزمنية و هي من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن:

$$\boxed{x=v_0.t+x_0} \qquad (13.4)$$

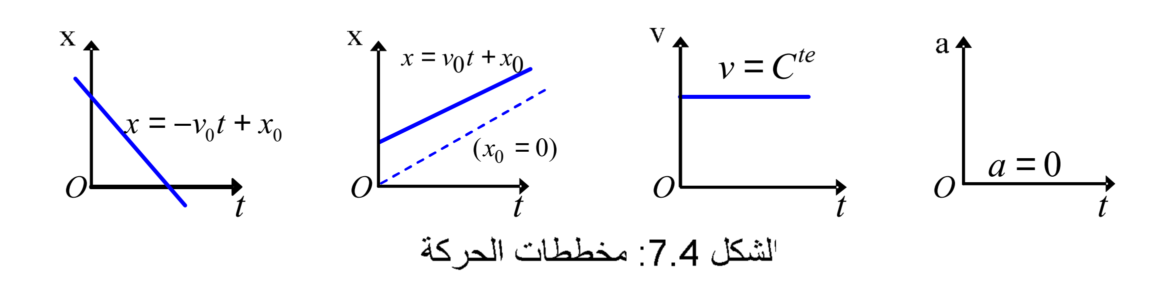
نسمي x الفاصلة اللحظية بينما x_0 الفاصلة الابتدائية.



الشكل 6.4: معلم الحركة

❖ **مخططات الحركة**:(diagrammes du mouvement)

مخططات الحركة هي التمثيل البياني لكل من التسارع السرعة و الإنتقال بدلالة الزمن (الشكل 7.4).



الشكل 7.4: مخططات الحركة

مثال4.4: المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية هي: $x = 2t; y = 2t+4; z = 0$ (كل الوحدات في الجملة الولية). برهن أن الحركة مستقيمة منتظمة.

تنبيه: $z = 0 \Leftarrow$ الحركة مستوية. إذا كان $y = 0; z = 0 \Leftarrow$ الحركة خطية.

إذا كان $z \neq 0; y \neq 0; x \neq 0 \Leftarrow$ الحركة فضائية.

الحل: نبرهن أولا أن الحركة مستقيمة؛ من أجل ذلك نبحث عن معادلة المسار فنجد:

$y = x + 4 \Leftarrow$ معادلة مستقيم، إذن الحركة مستقيمة.

حتى تكون الحركة منتظمة لابد أن تكون السرعة ثابتة: نكتب شعاع السرعة باشتقاق شعاع الموضع ثم نحسب شدة السرعة:

$\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow v = \sqrt{8} = 2.83 ms^{-1}$ إذن الحركة مستقيمة ومنتظمة.

2/ الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام: (mouvement rectiligne uniformément varié)

❖ **تعريف:** تكون حركة نقطة مادية مستقيمة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما و التسارع ثابتا.

❖ **السرعة الجبرية:** باعتبار الشروط الإبتدائية: $t = 0 \; ; \; v = v_0$ و انطلاقا من التعاريف السابقة نكتب: $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \Rightarrow v\big|_{v_0}^{v} = at\big|_0^t$

ونحصل في الأخير على معادلة السرعة اللحظية و هي من الدرجة الأولى للزمن:

$$\boxed{v = v_0 . t + v_0} \qquad (14.4)$$

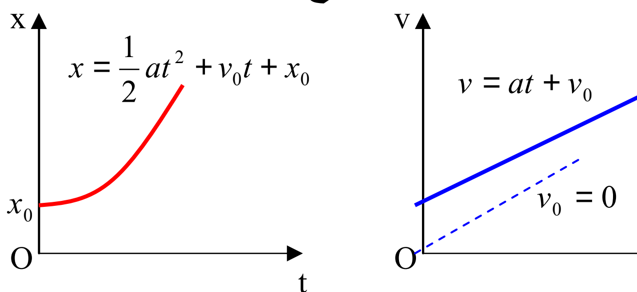
❖ **المعادلة الزمنية للحركة:** إذا أخذنا في $t = 0 \; ; \; x = x_0$ و انطلاقا مما سبق نكتب: $v = \dfrac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx = (at + v_{0)})dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (at + v_{0)})dt$

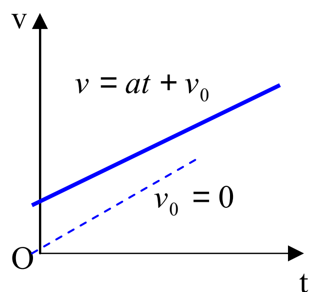
ومنه فإن المعادلة الزمنية هي:

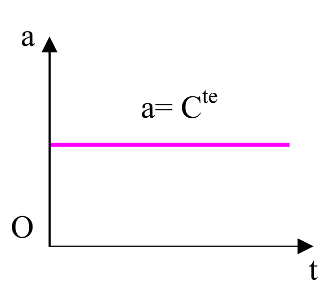
$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} \qquad (15.4)$$

❖ **مخططات الحركة:**

نلاحظ في الشكل 8.4 مخططات الحركة لكل من التسارع السرعة و الإنتقال.







الشكل 8.4: مخططات الحركة

يمكن للطالب أن يبرهن أن: $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

✓ تذكير: تكون الحركة مستقيمة متسارعة (accéléré) بانتظام إذا كان $\vec{a}.\vec{v} > \vec{0}$ تكون الحركة مستقيمة متباطئة (retardé) بانتظام إذا كان $\vec{a}.\vec{v} < \vec{0}$

مثال 5.4: يتحرك جسم وفق المحور OX بسرعة معادلتها: $v = 2t - 6 \ \ (ms^{-1})\, ; t \geq 0$.

ا/إستنتج معادلة التسارع و المعادلة الزمنية لهذه الحركة علما أن في $x = 5\text{m}$, $t = 0$. ما طبيعة الحركة ؟

ب/ بين الأطوار (متسارعة و متباطئة) للحركة.

الحل: ا/ نحصل على معادلة التسارع باشتقاق عبارة السرعة: $a = \frac{dv}{dt} = 2ms^{-2}$ و هو ثابت.

المعادلة الزمنية للحركة نتوصل إليها بتكامل عبارة السرعة:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t vdt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t (2t - 6)$$

$$x = x_0 + t^2 - 6t \ ; \ t = 0 \ , \ x = 5 \Rightarrow x_0 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{x = t^2 - 6t + 5}$$

ب/أطوار الحركة: نقيم جدولا للتغيرات:

t	0	1	3	5	∞
v		-	0	+	
a		+		+	
x	↘	0	-4	0	↗
av		-	0	+	
		الحركة متباطئة	*	الحركة متسارعة	

جدول التغيرات 1.4

3/ الحركة المستقيمة متغيرة التسارع: (mouvement rectiligne à accélération variable)

❖ **تعريف:** تكون حركة نقطة مادية مستقيمة و متغيرة التسارع إذا كان المسار مستقيما و التسارع تابعا للزمن: $(a = f(t))$.

مثال 6.4: ينتقل جسم نقطي وفق مستقيم بتسارع: $a = 4 - t^2$ (كل الوحدات في الجملة الدولية MKS).

أوجد عبارتي السرعة و الإنتقال بدلالة الزمن متخذا الشروط التالية:

$$t = 3s \ ; \ \ v = 2ms^{-1} \ \ ; x = 9m$$

الجواب:

للحصول على العبارة الحرفية للسرعة نكامل عبارة التسارع:

$$v=\int_0^t a dt+v_0 \Rightarrow v=v_0+\int_0^t (4-t^2)dt$$

$$v=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0$$

نكامل من جديد لنحصل على العبارة الحرفية للإنتقال:

$$x=x_0+\int_0^t v dt \quad \Rightarrow x=-\frac{1}{12}t^4+2t^2-v_0 t+x_0$$

بقي لنا الآن تحديد كل من الفاصلة x_0 و السرعة v_0 الابتدائيتين للجسم. حسب المعطيات، نعوض في العبارتين المتوصل إليهما الزمن بالقيمة $t=3s$:

$$t=3s \Rightarrow x_0=\frac{3}{4}m \quad ; \quad v_0=-1ms^{-1}$$

في الأخير نكتب عبارتي السرعة و الإنتقال اللحظيين:

$$\boxed{x=2t^2-\frac{1}{12}t^4-t+\frac{3}{4}} \qquad \boxed{v=4t-\frac{1}{3}t^3-1}$$

4/ الحركة المستقيمة الجيبية: (mouvement rectiligne sinusoïdal)

❖ **تعريف:** تكون الحركة مستقيمة جيبية لنقطة مادية إذا أمكن كتابة المعادلة الزمنية لحركتها بالشكل:

$$\boxed{x=X_m.\cos(\omega.t+\varphi)} \qquad (16.4)$$

أو حتى: $x=X_m.\sin(\omega.t+\alpha)$

x: الفاصلة أو المطال اللحظي ، (élongation ou abscisse instantanée)

X_m : السعة أو المطال الأعظمي (amplitude ou élongation maximale): يتغير المطال بين قيمتين حديتين: $-1\le\cos(\omega t+\varphi)\le+1 \Rightarrow -X_m\le x\le+X_m$

ω : نبض الحركة (pulsation du mouvement) ،

φ: الطور الإبتدائي أو الصفحة الإبتدائية (phase initiale) ،

$(\omega t+\varphi)$: الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية (phase instantanée) .

السرعة: نشتق المعادلة الزمنية: $v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}$

$$\boxed{v=-X_m.\omega\sin(\omega t+\varphi)} \qquad (17.4)$$

تتغير هذه السرعة بين قيمتين حديتين:

$$-1 \le \sin(\omega t + \varphi) \le +1 \Rightarrow -X_m.\omega \le v \le +X_m.\omega$$

❖ **التسارع:** نشتق معالة السرعة: $a = \ddot{x} = \dot{v} = \dfrac{dv}{dt}$

$$\boxed{a = -X_m \omega^2 \cos(\omega.t + \varphi)} \qquad (18.4)$$

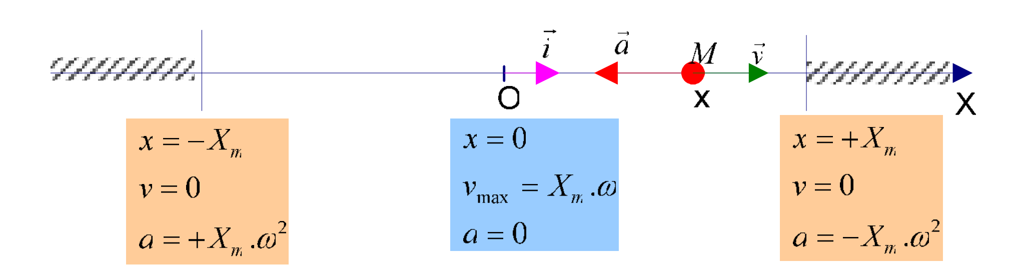
يتغير هذه التسارع بين قيمتين حديتين:

$$+X_m \omega^2 \ge a \ge -X_m \omega^2$$

يمكن كتابة عبارة التسارع على النحو التالي:

$$\boxed{a = -\omega^2.x} \qquad (19.4)$$

التسارع يتناسب طردا مع المطال و يعاكسه في الاتجاه.
عكس السرعة، ينعدم التسارع عند مرور المتحرك من موضع التوازن (مبدأ الفواصل) و يكون أعظميا عند بلوغ المتحرك مطاله الأعظمي.
لخصنا على الشكل9.4 أهم خصائص الحركة المستقيمة الجيبية:



الشكل 9.4

❖ **المعادلة التفاضلية للحركة**(équation différentielle du mouvement)

انطلاقا من معادلة التسارع يمكن كتابة:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0} \qquad (20.4)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

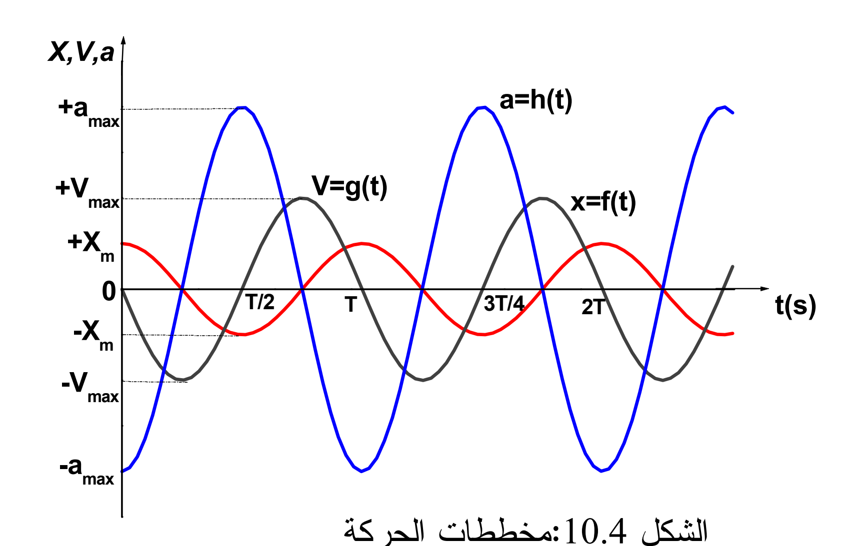
رياضيا حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل: $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. يمكن كتابة هذه المعادلة بعد التحويلات المثلثية على الشكل $x = X_m\cos(\omega t + \varphi)$.

يحدد ثابتا التفاضل X_m و φ بمعرفة الشروط الإبتدائية لكل من المطال x_0 و السرعة v_0 الابتدائيتين؛ حيث نحصل على جملة معادلتين ذات مجهولين تسمح لنا بتعيين X_m و φ.

$$t = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x_0 = X_m \cos\varphi \\ v_0 = -X_m \sin\varphi \end{vmatrix}$$

❖ **مخططات الحركة:**

يمثل الشكل 10.4 مخططات كل من الإنتقال ، السرعة ، و التسارع للحركة المستقيمة الجيبية (للتبسيط اخترنا $\varphi = 0$).



الشكل 10.4:مخططات الحركة

مثال7.4: هزاز جيبي ممثل بالمعادلة: $x = 4\sin(0.1t + 0.5)$ (كل المقادير معبر عنها في وحدات MKS).

أوجد : ا/ السعة، الدور، التواتر و الصفحة الإبتدائية للحركة.

ب/ السرعة و التسارع.

ج/ الشروط الإبتدائية.

د/ الموضع، السرعة و التسارع في $t = 5s$.

هـ/ أرسم مخططات الحركة.

الحل: نطابق المعادلة الزمنية العامة للحركة المستقيمة الجيبية مع المعادلة الزمنية الواردة في نص التمرين.

ا/ السعة، الدور، التواتر و الصفحة الإبتدائية للحركة:

$$\boxed{X_m = 4m}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 20\pi = 62.8s};$$

$$N = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = 1.59.10^{-2}\,Hz};\quad \boxed{\varphi = 0.5rad}.$$

ب/ حساب السرعة و التسارع:

$$\boxed{v = \dot{x} = 0.4\cos(0.1t + 0.5)}\ ;\ a = \dot{v} = -0.04\sin(0.1t + 0.5) = -0.04x \quad \boxed{a = -0.04x}$$

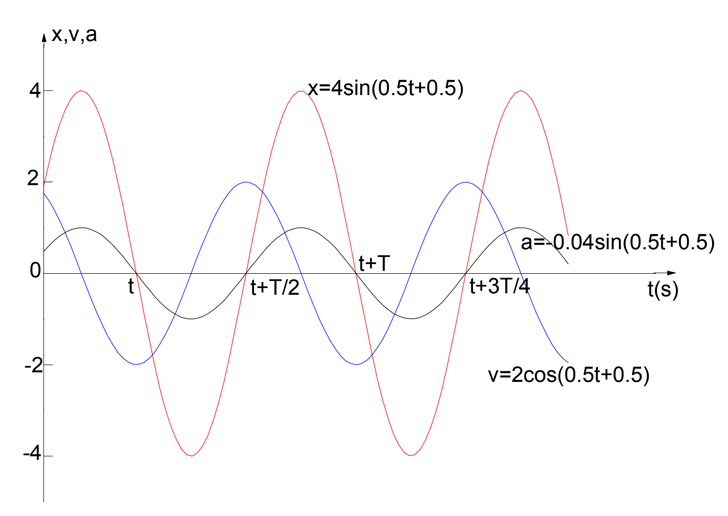
ج/ تحديد الشروط الإبتدائية:

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4\sin 0.5 = 1.92m \;\Rightarrow \boxed{x_0 = 1.92m}\;;$$
$$v_0 = 0.4\cos 0.5 \approx 0.35ms^{-1} \;\Rightarrow \boxed{v_0 = 0.35m}$$

د/ تعيين الموضع، السرعة و التسارع في $t = 5s$:

$$t = 5s:\; x = 4sin(0.5 + 0.5) \;\Rightarrow \boxed{x = 3.36m}\;;$$
$$v = 0.4cos1 \Rightarrow \boxed{v = 0.22ms^{-1}}\;;$$
$$a = -0.04sin1 \Rightarrow \boxed{a = 0.034ms^{-2}}.$$

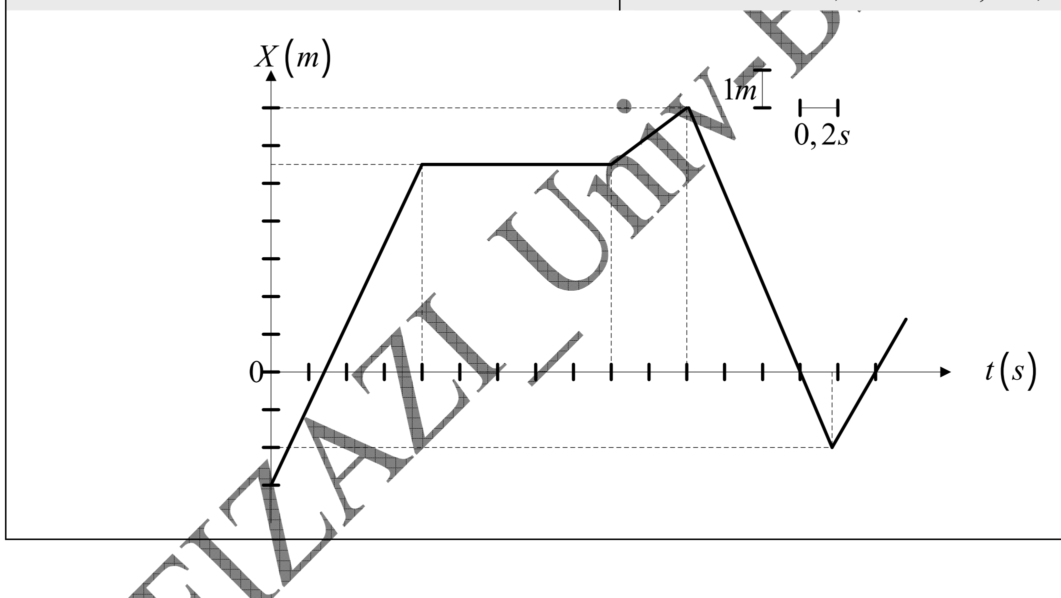
هـــ/ مخططات الحركة: ننصح الطالب بالتمرن على القيام بها و عدم الإكتفاء بالنظر إليها.



الشكل 11.4: مخططات الحركة

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 4.8	**التمرين 8.4:**
La position d'un mobile en fonction du temps est indiquée sur la figure ci-dessous. Indiquer : 1/ en quel endroit le mouvement se fait dans la direction des X positifs ou négatifs ? 2/ à quel instant le mouvement est retardé ou accéléré ? 3/ quand le corps passe par l'origine ? 4/ quand la vitesse est nulle ? 5/ faire un graphique de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps, 6/ estimer d'après le graphique, la vitesse moyenne pour les intervalles de temps : $1s \le t \le 1,8s$, $1s \le t \le 2,2s$, $1s \le t \le 3s$	موضع المتحرك بدلالة الزمن مبيّن على الشكل أسفله. بيّن: 1/ في أي موضع تتمّ الحركة في جهة الفواصل X الموجبة أو السالبة؟ 2/ في أي لحظة تكون الحركة متسارعة أو متباطئة؟ 3/متى يمرّ الجسم من مبدإ الفواصل؟ 4/ متى تنعدم السرعة؟ 5/ قم برسم بياني للسرعة و التسارع بدلالة الزمن، 6/ انطلاقا من الرسم البياني، قيّم السرعة المتوسطة من أجل الفواصل الزمنية: $1s \le t \le 3s$, $1s \le t \le 2,2s$, $1s \le t \le 1,8s$



Exercice 4.9	**التمرين 9.4**
Un point matériel se déplace sur l'axe $x'ox$ de façon qu'entre le carré v^2 de sa vitesse et son abscisse x, il existe la relation $v^2 = Ax + B$,où A et B sont des constantes. 1/ Calculer l'accélération du mobile. Que peut on dire du mouvement ? 2/ Connaissant la nature du mouvement, trouver par une autre méthode les valeurs de A et B en fonction des caractéristiques du mouvement.	تنتقل نقطة مادية على المحور $x'ox$ بحيث توجد ، بين مربع سرعتها v^2 و فاصلتها x، العلاقة $v^2 = Ax + B$ ، A و B ثابتان. 1/ أحسب تسارع المتحرّك. ماذا يمكن أن نقول عن الحركة؟ 2/ بمعرفة طبيعة الحركة، أوجد بطريقة أخرى قيمتي A و B بدلالة مميزات الحركة.

Exercice 4.10

Une pierre est lancée verticalement vers le haut depuis le toit d'un immeuble avec une vitesse de $29,4ms^{-1}$.On laisse tomber une seconde pierre $4s$ après avoir jeté la première. Démontrer que la première pierre dépassera la seconde $4s$ exactement après que l'on ait lâché la seconde.

$g = 9,8ms^{-2}$.

تمرين 10.4:

تقذف حجارة شاقوليا إلى الأعلى بسرعة $29,4ms^{-1}$ انطلاقا من سطح عمارة. بعد $4s$ من قذف الحجارة الأولى نترك حجارة ثانية تسقط. برهن أن الحجارة الأولى تتجاوز الحجارة الثانية $4s$ بالضبط بعد تركنا للثانية.

$g = 9,8ms^{-2}$

Exercice 4.11

Un homme au sommet d'un immeuble lance une boule verticalement vers le haut avec une vitesse $12m.s^{-1}$. La boule atteint le sol $4,25s$ plus tard.

1/ Quelle est la hauteur maximale atteinte par la boule ?

2/ Quelle est la hauteur de l'immeuble ?

3/ Avec quelle vitesse atteint-elle le sol ?

$g = 9,8ms^{-2}$

تمرين 11.4:

يقذف رجل من قمّة عمارة شاقوليا إلى الأعلى كرة بسرعة $12m.s^{-1}$. تصل الكرة إلى الأرض بعد $4,25s$ من قذفها.

1/ ما هو الارتفاع الأعظمي الذي تبلغه الكرة؟

2/ كم هو علو العمارة؟

3/ ما هي السرعة التي تصطدم بها الكرة مع الأرض؟

$g = 9,8ms^{-2}$

Exercice 4.12

L'unité de longueur est le centimètre, l'unité de temps la seconde.

Une automobile se déplace en mouvement rectiligne.

Son accélération est donnée par $a = -\frac{\pi^2}{4}x$, tel que , à la date $t = 1s$, on ait l'abscisse $x = 4cm$ et la vitesse $v = 2\pi cm.s^{-1}$.

1/ déterminer la nature du mouvement, écrire son équation horaire.

2/ calculer toutes les constantes qui caractérisent le mouvement,

3/ montrer que x peut s'écrire sous la forme : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

التمرين 12.4:

وحدة الطول هي السنتيمتر، وحدة الزمن هي الثانية.

تنتقل سيارة بحركة مستقيمة. يعطى تسارعها بـــ $a = -\frac{\pi^2}{4}x$ ، بحيث أن في اللحظة $t = 1s$ تكون الفاصلة $x = 4cm$ و السرعة $v = 2\pi cm.s^{-1}$.

1/ حدّد طبيعة الحركة، أكتب معادلتها الزمنية.

2/ أحسب كل الثوابت التي تميّز الحركة،

3/ بيّن أنه يمكن كتابة x على الشكل: $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Exercice 4.13

Un corps est animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération est donnée par $a = 32 - 4v$ (avec comme conditions initiales $x = 0$ et $v = 4$ pour $t = 0$).

Trouver v en fonction de t, x en fonction de t et x en fonction de v.

تمرين 13.4:

ينتقل جسم بحركة مستقيمة بتسارع $a = 32 - 4v$ (بشروط ابتدائية $x = 0$ و $v = 4$ من أجل $t = 0$).

أوجد v بدلالة t ، x بدلالة t و x بدلالة v .

Corrigés des exercices 4.8 à 4.13   حلول التمارين من 8.4 إلى 13.4

التمرين 8.4:

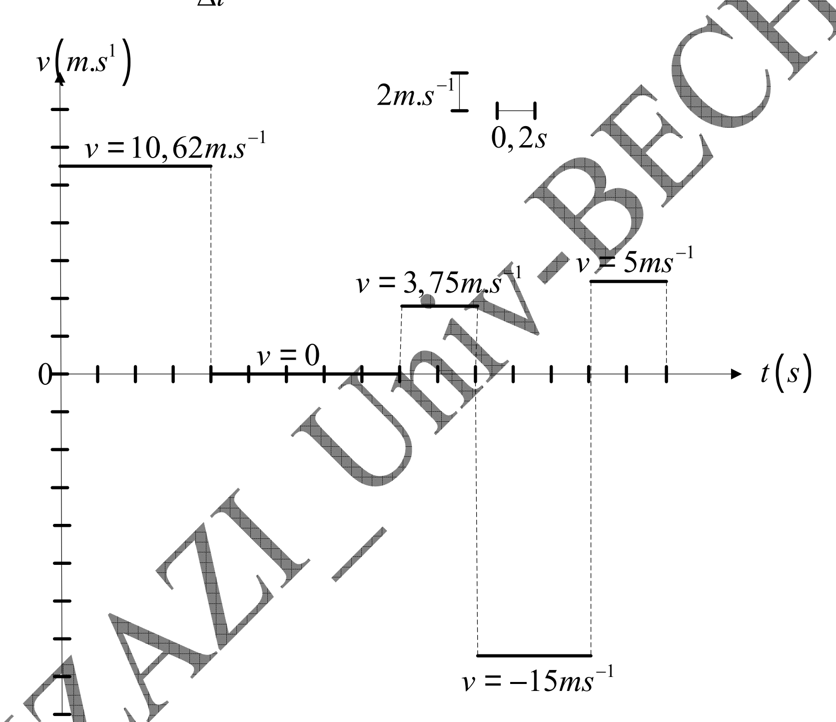
1/ كل الحركة تجري في الاتجاه الموجب للفواصل X، ما عدى في الفاصل الزمني: $2,2s \le t \le 2,8s$، حيث تجري في الاتجاه السالب. المتحرّك في سكون بين اللحظتين $t = 0,8s$ و $t = 1,8s$.

2/ الحركة متسارعة **آنيا** في اللحظتين $t = 1,8s$ و $t = 2.8s$ ؛ و متباطئة **آنيا** في اللحظتين $t = 1,8s$ و $t = 2.8s$.

3/ يمرّ المتحرّك من المبدإ في اللحظات $t = 0,3s$, $t=2,8s$, $t=3,2s$.

4/ تنعدم السرعة في اللحظتين: $t = 0,8s$ حتى اللحظة $t = 1,8s$.

5/ الرسم البياني للسرعة بدلالة الزمن:الحركة مستقيمة منتظمة $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$



6/ السرعات المتوسطة:

$$1 \le t \le 1,8s \quad , \quad v_{moy} = 0$$

$$1s \le t \le 2,2s \quad , \quad v_{moy} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25ms^{-1}$$

$$1s \le t \le 3s \quad , \quad v_{moy} = \frac{1,5 - 9 + 2}{2} = -2,25ms^{-1}$$

التمرين 9.4:

1/ نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن: $2v\dfrac{dv}{dt} = A\dfrac{dx}{dt} \quad , \quad 2v.a = A.v \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{A}{2}}$

بما أن التسارع ثابت و المسار مستقيم، فإن **الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام**.

2/ برهنا أن الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام، و هذا يسمح لنا بكتابة:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v^2 = a^2t^2 + v_0^2 + 2a.v_0.t$$

$$v^2 = a(at^2 + 2v_0t) + v_0^2 \Rightarrow v^2 = 2a(\underbrace{\frac{1}{2}at^2 + v_0t}_{x}) + v_0^2 \Rightarrow 2a.x + v_0^2 \rightarrow (1)$$

حسب المعطيات: $v^2 = Ax + B \rightarrow (2)$

بمطابقة العبارتين (1) و (2) نستنتج: $\boxed{A = \frac{a}{2} \quad ; \quad B = v_0^2}$

تمرين 10.4:

بالنسبة للحجارتين الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام. نوجه المحور OZ إلى الأعلى. نحسب المسافة التي قطعتها الحجارة الثانية خلال 4ثواني، أي فاصلتها على المحور OZ:

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 \quad ; \quad \boxed{z_1 = -78,4m}$$

حسب المعطيات نستنتج أن الحجارة الأولى تتجاوز الحجارة الثانية بعد 8 ثواني من قذفها. نحسب فاصلتها في هذه اللحظة:

$$z_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 \quad ; \quad \boxed{z_2 = -78,4m}$$

توجد الحجارتان على نفس العلو $(z = z_1 = z_2)$، 8 ثواني بعد قذف الأولى و 4 ثواني بعد ترك الثانية تسقط سقوطا حرّا.

تمرين 11.4:

1/ نختار المحور OZ موجه إلى الأعلى و مبدأه سقف العمارة.

حركة الكرة مستقيمة متغيرة بانتظام. تبلغ الكرة ارتفاعها الأعظمي لما تنعدم سرعتها، فتتوقف لتسقط إلى الأسفل:

$$\not{v}^2 - v_0^2 = -2gh \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}} \quad , \quad \boxed{h \simeq 7,35m}$$

علو العمارة يساوي فاصلة الحجارة عند اصطدامها بالأرض(أي في $t = 4,25s$).

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t \quad ; \quad \boxed{|z| = 37,5m}$$

سرعة اصطدام الكرة مع الأرض:

$$v = -gt + v_0 \quad ; \quad \boxed{v = -29,65ms^{-1}}$$

(الإشارة – ناتجة عن توجيه المحور OZ)

التمرين 12.4:

1/نلاحظ أنّ لدينا معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى: $a = -\frac{\pi^2}{4}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\pi^2}{4}x = 0$، و هي المعادلة التفاضلية المميّزة للحركة المستقيمة الجيبية.

حلّها، كما رأينا في الدرس، هو من الشكل: $x = A\cos\frac{\pi}{2}t + B\sin\frac{\pi}{2}t$.

2/ مميزات الحركة المستقيمة الجيبية هي: **النبض، السعة و الصفحة الابتدائية.**

لإيجاد قيم هذه الثوابت لا بد من تحويل المعادلة الزمنية إلى الشكل:

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow (1)$$

نستنتج عبارة السرعة اللحظية باشتقاق المعادلة الزمنية: $v = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + B\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$

حسب الشروط الابتدائية فإن:

$$t = 1s \ , \ x=4cm \ , \ 4=0+B\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{B = 4cm}$$

$$t = 1s \ , \ v=-2\pi cm.s^{-1} \ , \ -2\pi = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{A = 4cm}$$

يمكننا الآن كتابة المعادلة الزمنية: $x = 4\cos\frac{\pi}{2}t + 4\sin\frac{\pi}{2}t \Rightarrow x = 4\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t\right)$

نضرب طرفي المعادلة في المقدار $\frac{\sqrt{2}}{2}$ لنحصل على:

$$x\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

بما أن $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، يمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$x = 4\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

نقوم الآن بتحويل مثلثي:

$$x = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}t.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}t.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) \rightarrow (2)$$

في آخر المطاف نتوصل إلى عبارة المعادلة الزمنية التي نتمكّن من خلالها الحصول على القيمتين المميزتين المتبقيتين و ذلك بمطابقة المعادلتين (1) و (2):

$$x = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) = X_m.\cos(\omega t + \varphi)$$

النبض: $\boxed{\omega = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}}$ **السعة:** $\boxed{X_m = 4\sqrt{2}cm}$ **الصفحة الابتدائية:** $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{4} rad}$

تمرين 13.4:

نلاحظ أن عبارة التسارع هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$a = 32 - 4v \Leftrightarrow \dot{v} + 4v = 32$$

حلّها من الشكل: $v = Ae^{-4t} + \frac{4}{32}$

لمعرفة قيمة الثابت A نلجأ للشروط الابتدائية: $t = 0 \ , \ v= 4 \ , \ 4= Ae^{0}+8 \Rightarrow \boxed{A=-4}$

و عليه فإن السرعة بدلالة الزمن هي: $\boxed{v= -4e^{-4t}+8} \rightarrow (1)$

نكامل حتى نحصل على المعادلة الزمنية للحركة:

$$v = \frac{dx}{dt} = -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow dx = \left(-4e^{-4t} + 8\right)dt \Rightarrow x = \int\left(-4e^{-4t} + 8\right)dt$$

$$x = e^{-4t} + 8t + B$$

نحسب قيمة الثابت B انطلاقا من الشروط الابتدائية:

$$t = 0 \ , \ x=0 \Rightarrow 0 = e^{-0} + B \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

x بدلالة t هي إذن:

$$\boxed{x = e^{-4t} + 8t - 1} \rightarrow (2)$$

للحصول على x بدلالة v، نحذف الزمن ما بين المعادلتين (1) و (2):

من (1):

$$v= -4e^{-4t} + 8 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{8-v}{4}\right)$$

نعوض في (2):

$$x = e^{-4\left[-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{8-v}{4}\right)\right]} + 8.\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{8-v}{4}\right) - 1 \Rightarrow x = \left(\frac{8-v}{4}\right) - 2\ln\left(\frac{8-v}{4}\right) - 1$$

و في النهاية:

$$\boxed{x = -2\ln\left(\frac{8-v}{4}\right) - \frac{1}{4}v + 1}$$

الحركات المستوية/ C-IV
MOUVEMENT DANS LE PLAN

إذا كان المسار منتميا إلى مستو يمكن تحديد موضع المتحرك بواسطة الإحداثيات المستطيلة أو الإحداثيات القطبية.

1/دراسة الحركة بالإحداثيات المنحنية:

❖ **موضع المتحرك:** ليكن M نقطة مادية مسارها المنحني (C).

موضع المتحرك بالإحداثيات الكارتيزية كما سبق و أن رأينا هو:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}} \qquad (21.4)$$

الشكل12.4:الإحداثيتان القطبيتان للسرعة

أما بالإحداثيات القطبية فهو:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad (22.4)$$

حيث:

$$\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$$

و بالتالي:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta)$$

تنبيه: r و θ تابعان للزمن: $r = f(t)$ و $\theta = g(t)$.

❖ **عبارة السرعة:**

- بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}} \qquad (23.4)$$

- بالإحداثيات القطبية: استنادا إلى الشكل 12.4 يمكننا كتابة عبارتي شعاعي الواحدة $\vec{u}_r$ و $\vec{u}_\theta$ بدلالة شعاعي الواحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$:

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta \qquad ; \qquad \vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta} \qquad (24.4)$$

و نحسب مشتقتيهما:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt}=-\vec{i}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt}+\vec{j}\cos\theta.\frac{d\theta}{dt}=\vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-\vec{i}.\cos\theta.\frac{d\theta}{dt}-\vec{j}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt}=-\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}} \quad (25.4)$$

و نحسب الآن عبارة السرعة بالإحداثيات القطبية مستعينين بالعبارة (25.4):

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=r\frac{d\vec{u}_r}{dt}+\vec{u}_r\frac{dr}{dt}\Rightarrow\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\Leftrightarrow\boxed{\vec{v}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta} \quad (26.4)$$

أي أن للسرعة مركبتان عرضية $\vec{v}_\theta$ و قطرية $\vec{v}_r$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\\ \vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}\vec{v}_r=\dot{r}.\vec{u}_r\\ \vec{v}_\theta=r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\end{array}\Rightarrow v=\sqrt{\dot{r}^2+(r.\dot{\theta})^2}$$

❖ **عبارة التسارع:**

بالإحداثيات المستطيلة: $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}$

بالإحداثيات القطبية: نشتق العبارة (26.4) السابقة للسرعة بالنسبة للزمن و نستعمل العبارة (25.4):

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{r}.\frac{d\vec{u}_r}{dt}+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}=\dot{r}.(\vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt})+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt})+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

بتنظيم هذه العبارة و باستعمال ترميز نيوتن نتوصل إلى العبارة النهائية لشعاع التسارع بالإحداثيات القطبية:

$$\vec{a}=\dot{r}.\vec{u}_\theta.\dot{\theta}+\ddot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\theta}.(-\vec{u}_r\dot{\theta})+r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a}=(\underbrace{\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2}_{a_r}).\vec{u}_r+(\underbrace{2\dot{r}.\dot{\theta}+r.\ddot{\theta}}_{a_\theta}).\vec{u}_\theta} \quad (27.4)$$

نلاحظ أن لهذا التسارع مركبتان قطرية $\vec{a}_r$ و عرضية $\vec{a}_\theta$:

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_\theta} \quad (28.4)$$

أما شدته فهي:

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta})^2} \quad (29.4)$$

❖ **حالة خاصة: الحركة الدائرية:** (mouvement circulaire)

بما أن $r = R = C^{te}$، فإن شعاع السرعة:

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (30.4)$$

و عبارة شعاع التسارع:

$$\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_r + R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta \quad (31.4)$$

نلاحظ أن للتسارع مركبتان:

✓ **التسارع الناظمي**(accélération normale) الذي يحمله الناظم و هو موجّه نحو المركز عكس اتجاه $\vec{a}$ ، هو مؤشر لتغير **حامل السرعة**:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_N = R\dot{\theta}^2\vec{u}_r \Rightarrow a_r = a_N = R\dot{\theta}^2 \quad (32.4)$$

✓ **التسارع المماسي** (accélération tangentielle) الذي حامله مماس للمسار في النقطة M و هو مؤشر على تغير **شدة السرعة**.

$$\vec{a}_\theta = \vec{a}_T = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow a_\theta = a_T = R\ddot{\theta} \quad (33.4)$$

❖ **حالة خاصة: الحركة الدائرية المنتظمة:** (mouvement circulaire uniforme)

في الحركة الدائرية المنتظمة شدة السرعة ثابتة. و بما أن $r = R = C^{te}$، فإن السرعة:

$$v = R\dot{\theta} = R\omega \quad (34.4)$$

حيث نتعرف على السرعة الزاوية ω و هي تمثل الزاوية الممسوحة خلال واحدة الزمن و وحدتها الراديان على الثانية ($rad.s^{-1}$).

أما التسارع فهو:

$$a = a_r = a_N = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \vec{a}_N = -R\omega^2.\vec{u}_r \quad (35.4)$$

2/ المركبتان، الناظمية و المماسية، للسرعة و التسارع في معلم فرينت(Frenet):

نتخذ الآن حركة مسارها (C) كيف ما كان، و نعين المعلم المشكل من المحور MT ، وهو مماس للمسار في النقطة M و يحمل شعاع السرعة $\vec{v}$ ، والمحور MN العمودي على المحور MT.

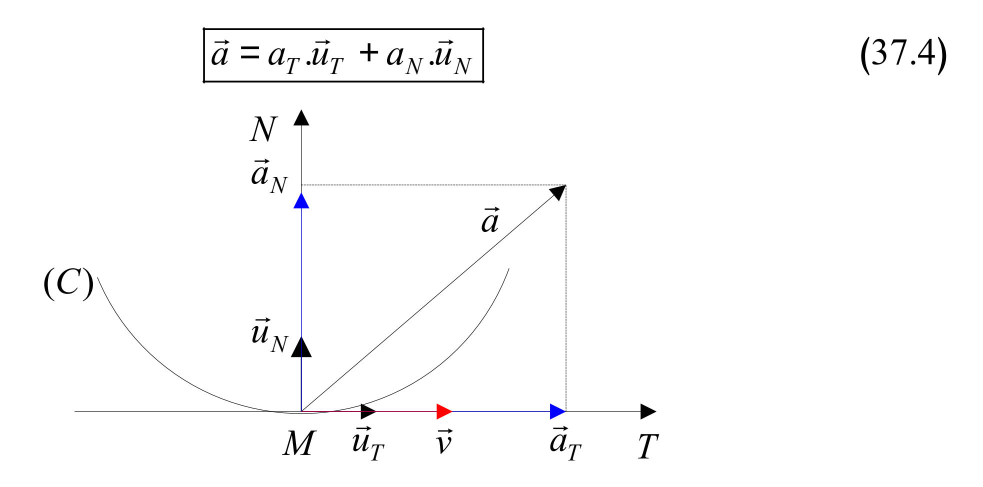
ليكن $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$ شعاعي الواحدة وفق MT و MN على التوالي. نلاحظ من الشكل أن السرعة تكتب:

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T} \quad (36.4)$$

أما التسارع فيكتب: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

و بالتالي فإن:

$$\boxed{\vec{a} = a_T.\vec{u}_T + a_N.\vec{u}_N} \quad (37.4)$$



الشكل 13.4: السرعة و التسارع في معلم فرينت

تبعا لما سبق فإن:

$$\left.\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} \\ a_N &= \frac{v^2}{R} \end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{a} = \dot{v}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N \Rightarrow a = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

نسمي العبارتين (36.4) و (37.4) بمركبتي السرعة و التسارع في معلم فرينت أو المركبتين الذاتيتين أو المحليتين.

إذا كان ds هو الإنتقال العنصري فيكون من البديهي أن شعاع الموضع هو:

$$\boxed{\vec{r} = \int \vec{u}_T.ds} \quad (38.4)$$

مثال8.4:

يعطى المسار المستوي لنقطة مادية بالإحداثيات القطبية بالمعادلة:

$$\rho.\cos^2\frac{\varphi}{2} = a$$

حيث a ثابت. نفترض الشدة v لسرعة هذه النقطة تتناسب طردا مع ρ: $v = k\rho$ حيث $k > 0$.

أحسب المركبتين الناظمية v_ρ و العرضية v_φ لشعاع السرعة.

الحل:

نعرف أن: $\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi$

لاحظ هنا أننا استبدلنا الحرفين r بـــ ρ و θ بـــ φ (إذن لا تحفظ الحروف !!).

انطلاقا من المعطيات نقوم بالحسابات:

$$\rho\cos^2(\varphi/2) = a \Rightarrow \rho = \frac{a}{\cos^2(\varphi/2)}$$

نشتق عبارة ρ لنحصل على السرعة الناظمية v_ρ:

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow v_\rho = \frac{a.\cos(\varphi/2).\sin(\varphi/2)}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}$$

أما السرعة العرضية فهي:

$$v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}$$

غير أن $\dot{\varphi}$ تبقى مجهولة، و لذا يجب حسابها انطلاقا من $v^2 = {v_\rho}^2 + {v_\varphi}^2$

و حسب المعطيات فإن:

$$v^2 = k^2.\rho^2 = k^2.\frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}$$

و عليه :

$$k^2.\frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)} = \frac{a^2.\sin^2(\varphi/2)}{\cos^6(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}.\dot{\varphi}^2 \Rightarrow k^2 = \left[\frac{\sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} + 1\right].\dot{\varphi}^2$$

و منه : $\dot{\varphi}^2 = k^2.\cos^2(\varphi/2) \Rightarrow \dot{\varphi} = k.\cos(\varphi/2)$

بتعويض $\dot{\varphi}$ بقيمتها الحرفية في عبارتي v_ρ و v_φ نصل إلى ما هو مطلوب:

$$v_\rho = \frac{a.k.\sin(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} \Rightarrow \boxed{v_\rho = v.\sin(\varphi/2)}$$

$$\boxed{v_\theta = \frac{a.k}{\cos(\varphi/2)}}$$

EXERCICES ** تــمـــاريـــن

Exercice 4.14

Une particule se déplace dans un plan XY selon la loi : $v_x = 4t^3 + 4t$ et $v_y = 4t$.

Si le mobile se trouvait au point $(1,2)$ à l'instant $t = 0$, trouver l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

التمرين 14.4:

تنتقل جسيمة في المستوى XY وفق القانون $v_x = 4t^3 + 4t$ و $v_y = 4t$. إذا وجد المتحرّك في النقطة $(1,2)$ في اللحظة $t = 0$، أوجد معادلة المسار بالإحداثيات الكارتيزية.

Exercice 4.15

Une particule se déplace dans un plan XY selon la loi : $a_x = -4\sin t$ et $a_y = 3\cos t$.

Sachant que pour $t = 0$ on ait $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ، trouver :

1/ l'équation de la trajectoire, quelle est son allure ?

2/ la valeur de la vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4} s$.

التمرين 15.4:

تنتقل جسيمة في المستوى XY وفق القانون $a_x = -4\sin t$ و $a_y = 3\cos t$. علما أنه من أجل $t = 0$ لدينا $x = 0$ ، $y = -3$ ، $v_x = 4$ و $v_y = 0$ ،

أوجد:

1/ معادلة المسار، ما شكله؟

2/ قيمة السرعة في اللحظة $t = \frac{\pi}{4} s$.

Exercice 4.16

Soit le mouvement défini par sa trajectoire $y = 3(x+2)$ et son équation horaire $s(t) = 2t^2$. Sachant que $x = -2$ et $y = 0$ quand $s(0) = 0$ et que s croit avec la croissance de y :

1/ trouver les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement,

2/ déterminer l'accélération normale et l'accélération tangentielle du mouvement.

التمرين 16.4:

لتكن الحركة المعرّفة بمسارها $y = 3(x+2)$ و بمعادلتها الزمنية $s(t) = 2t^2$. علما أن $x = -2$ و $y = 0$ لمّا $s(0) = 0$، كما أن s يتزايد مع تزايد y :

1/ أوجد المعادلتين الوسيطيتين $x(t)$ و $y(t)$ للحركة،

2/ حدد التسارع الناظمي و التسارع المماسي للحركة.

Exercice 4.17

On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel : $x = 2t$ et $y = 4t^2 - 4t$

1/ Déterminer l'équation de la trajectoire, Quelle est son allure ?

2/Calculer la vitesse du mobile,

3/Montrer que son accélération est constante,

4/Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet.

5/En déduire le rayon de courbure.

التمرين 17.4:

تعطى المعادلتان الوسيطيتان للمسار المستوي لمتحرّك بالنسبة لمرجع: $x = 2t$ و $y = 4t^2 - 4t$.

1/ حدّد معادلة المسار، ما شكله؟

2/أحسب سرعة المتحرّك،

3/ برهن أن تسارعه ثابت،

4/ حدّد المركبتين الناظمية و المماسية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

Exercice 4.18

Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy d'origine O et de base ($\vec{i}, \vec{j}$). Les coordonnées x et y d'un point M mobile dans le plan ($O, \vec{i}, \vec{j}$) varient avec le temps suivant la loi:

التمرين 18.4:

ينسب المستوى إلى معلم متعامد و متجانس xOy مبدأه O و قاعدته $(\vec{i}, \vec{j})$. تتغير الإحداثيتان x و y

$x = 2\cos\frac{t}{2}$ et $y = 2\sin\frac{t}{2}$.

1/ Déterminer la nature de la trajectoire,

2/ Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$,

3/ Déterminer l'expression de la vitesse $\frac{ds}{dt}$, ainsi que celle de l'abscisse curviligne s du point M à l'instant t, en prenant comme condition initiale $s = 0$ quand $t = 0$,

4/ déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frenet,

5/En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

6/ La trajectoire reste la même, mais maintenant le point M subit une accélération angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$. A quelle date le point M atteindra-t-il une vitesse de $10ms^{-1}$, sachant qu'il est parti du repos. Quelle distance a-t-il alors parcourue ?

لنقطة M متحركة في المستوى $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ مع الزمن حسب القانون : $x = 2\cos\frac{t}{2}$ و $y = 2\sin\frac{t}{2}$.

1/ حدد طبيعة المسار.

2/ حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$ ،

3/ حدد عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الإحداثية s المنحنية لنقطة M في اللحظة t ، بأخذ الشرط الإبتدائي $s = 0$ لما $t = 0$ ،

4/ حدد المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع في معلم فرينت،

5/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

6/ المسار باق على حاله في حين تتأثر النقطة M بتسارع زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0,2t$. في أي لحظة تبلغ النقطة M سرعة $10ms^{-1}$ ، علما أنها انطلقت من السكون. ما هي المسافة التي قطعتها؟

Exercice 4.19

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires : $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ et $\theta = \frac{t}{b}$, $_0$ et b sont des constantes positives.

1/ calculer le vecteur vitesse de la particule,

2/ montrer que l'angle $\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)$ est constant. Que vaut cet angle ?

3/ calculer le vecteur accélération de la particule,

4/ montrer que l'angle $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)$ est constant. Que vaut cet angle ? (On se servira de la question2),

5/ calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

التمرين 19.4:

تنتقل جسيمة خاضعة لحقول كهربائية و مغناطيسية معقدة في مرجع غليلي. المعادلتان الزمنيتان بالإحداثيات القطبية هما $r = r_0 e^{-\frac{t}{b}}$ و $\theta = \frac{t}{b}$ ، $_0$ و b ثابتان موجبان.

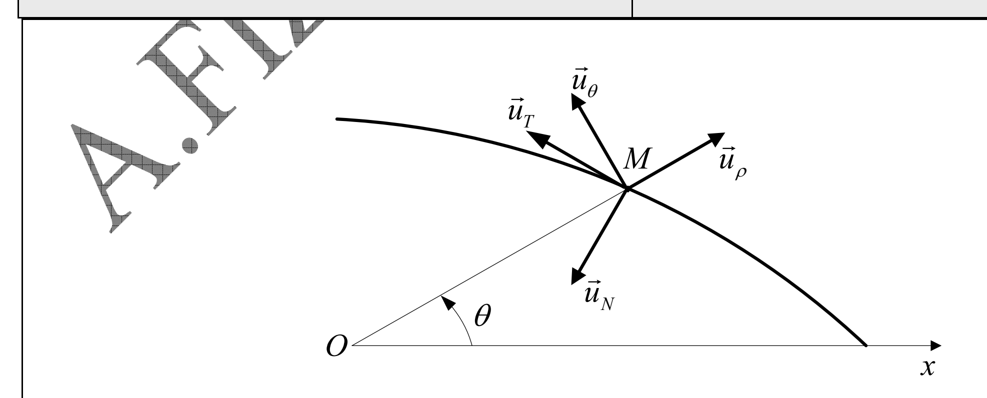
1/ أحسب شعاع السرعة للحركة،

2/ بيّن أن الزاوية $\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟

3/ أحسب شعاع التسارع للحركة،

4/ بيّن أن الزاوية $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right)$ ثابتة. كم تساوي هذه الزاوية؟(نستعين بالسؤال2)،

5/ أحسب نصف قطر انحناء المسار.



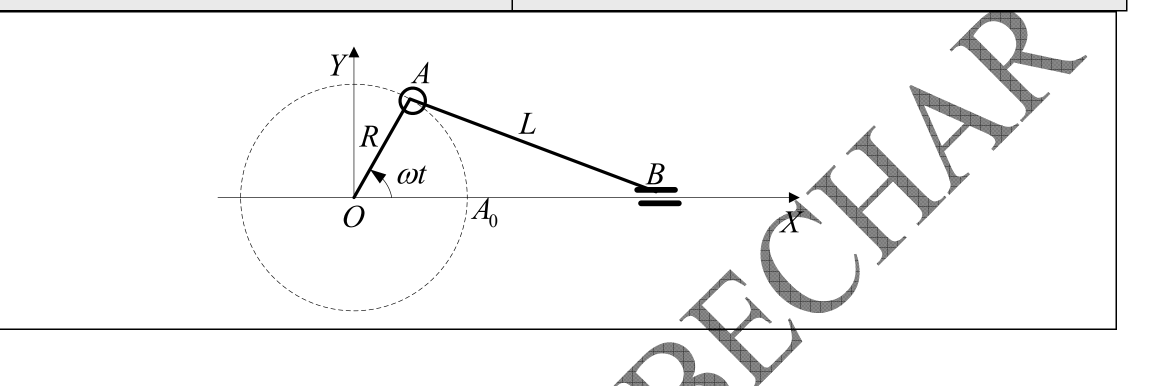
Exercice 4.20

Un bras OA tournant avec une vitesse ω autour

التمرين 20.4:

مدور OA يدور بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور

d'un axe O, est articulé en A avec une tige AB. La tige AB est solidaire d'un curseur B pouvant coulisser le long de l'axe Ox. le bras et la tige peuvent se croiser lorsque la tige passe par derrière l'articulation en O. Sachant que $AB = L$ et $OA = R$: 1/ trouver l'équation horaire du mouvement de B, sachant que B passe en A_0 au temps $t = 0$, 2/ à quel instants la vitesse s'annule-t-elle ?	O، و مشترك بواسطة مفصل عند A مع قضيب AB. القضيب AB متمفصل عند B بواسطة زلاقة قابلة للانزلاق على طول المحور Ox. يمكن للقضيبين OA و AB أن يتقاطعا في حين تمرّ الزلاقة خلف المفصل O. إذا كان $AB = L$ و $OA = R$: 1/ أوجد المعادلة الزمنية لحركة B علما أن A يمرّ في A_0 عند الزمن $t = 0$، 2/ في أي لحظات تنعدم السرعة؟



Exercice 4.21 Dans le plan (XOY) d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point P se déplace sur un cercle de rayon R et de centre $I(R,0,0)$. A l'instant $t = 0$, P se trouve en $A(2R,0,0)$ et possède la vitesse positive $\vec{v}_0\ (0,v_0,0)$. On désigne par et θ les coordonnées polaires de P. 1/ Former l'équation polaire du cercle, en déduire son équation cartésienne. 2/ Représenter sur la figure la base polaire $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ de P. Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes polaires des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et $\vec{a}$ de P dans le repère $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$. 3/ Soit s l'abscisse curviligne de P (l'origine est en A). • Donner l'expression de s en fonction de θ. • Représenter sur la figure la base intrinsèque $(\vec{u}_T,\vec{u}_N)$ de P. • Calculer en fonction de θ et de ses dérivées successives par rapport au temps les composantes de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$ dans cette base. • Calculer les composantes polaires de $\vec{u}_T$ et de $\vec{u}_N$. Retrouver dans ces conditions les composantes polaires de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$. 4. On désigne par ω la vitesse angulaire de P, dont on suppose dans tout ce qui suit qu'elle est constante.	**التمرين 21.4:** في مستو (XOY) لمعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، تنتقل نقطة P على دائرة نصف قطرها R و مركزها $I(R,0,0)$. في اللحظة $t = 0$، توجد P في $A(2R,0,0)$ و تكسب السرعة الموجبة $\vec{v}_0\ (0,v_0,0)$. نرمز إلى الإحداثيات القطبية لـ P بـ و θ. 1/ كوّن المعادلة القطبية للدائرة، إستنتج معادلتها الديكارتية. 2/ مثّل على الشكل القاعدة القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ لـ P. أحسب بدلالة θ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات شعاعي السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ لـ P في المعلم $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$. 3/ لتكن الفاصلة المنحنية s لـ P (المبدأ في A): • إعط عبارة s بدلالة θ، • مثّل على الشكل القاعدة الذاتية $(\vec{u}_T,\vec{u}_N)$ لـ P. • أحسب بدلالة θ و مشتقاتها المتتالية بالنسبة للزمن إحداثيات $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$ في هذا المعلم. • أحسب المركبتين القطبيتين $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$. • أوجد من جديد في هذه الشروط المركبتين القطبيتين لـ $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$. نرمز بـ ω للسرعة الزاوية لـ P، والتي نعتبرها في كل ما يتبع ثابتة. • إعط بدلالة t، عبارتي θ ثم . • إستنتج عبارتي $\vec{v}$ و $\vec{a}$ في القاعدتين القطبية و

• Donner en fonction de t, les expressions de θ puis de . • En déduire les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction de t de $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$ dans les bases polaire et de Frenet.	قاعدة فرينت.

Corrigés des exercices 4.14 à 21.4 — حلول التمارين من 14.4 إلى 21.4

التمرين 14.4:

نقوم بعملية تكامل كي نحصل على المعادلتين الزمنيتين للحركة:

$$v_x = 4t^3 + 4t \;\;,\;\; x = \int \left(4t^3 + 4t\right)dt \Rightarrow x = t^4 + 2t^2 + C_x$$

$$v_y = 4t \;\;,\; y = \int 4t.dt \Rightarrow y = 2t^2 + C_y$$

الشروط الابتدائية تسمح لنا بتحديد الثابتين C_x و C_y :

$$t = 0 \;,\; x = 1 \;,\; y = 2:$$
$$C_x = 1 \;,\; C_y = 2$$

نصل إلى: $x = t^4 + 2t^2 + 1 \;,\; y = 2t^2 + 2$

و منه فإن معادلة المسار هي:

$$x = \left(t^2 + 1\right)^2 \;\;,\;\; y = 2\left(t^2 + 1\right) \Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{x}}$$

التمرين 15.4:

1/ نقوم بعمليتي تكامل متتاليتين كي نحصل على المعادلتين الزمنيتين للحركة:

$$a_x = -4\sin t \Rightarrow v_x = 4\cos t + v_{0x} \;\;,\;\; x = 4\sin t + v_{0x}.t + C_x$$
$$a_y = 3\cos t \Rightarrow v_y = 3\sin t + v_{0y} \;\;,\;\; y = 3\sin t + v_{0y}.t + C_y$$

الشروط الابتدائية تسمح لنا بتحديد الثوابت v_{0x} ، v_{0y} ، C_x و C_y :

$$t = 0 \;,\; x = 0 \;,\; y = -3 \;,\; v_x = 4 \;\;,\;\; v_y = 0 \;\;\Rightarrow v_{0x} = 0 \;,\; v_{0y} = 0 \;,\; C_x = 0 \;,\; C_y = 0$$

نصل إلى:

$$v_x = 4\cos t \;\;,\;\; v_y = 3\sin t$$
$$x = 4\sin t \;\;,\;\; y = -3\cos t$$

و منه فإن معادلة المسار هي:

$$x = 4\sin t, \;\; y = -3\cos t \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1}$$

المسار **قطع ناقص.**

2/ السرعة في اللحظة $t = \frac{\pi}{4}s$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v = \sqrt{16\sin^2\frac{\pi}{4} + 9\cos^2\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{v = 3,53ms^{-1}}$$

التمرين 16.4:

لدينا المعادلة الزمنية بالإحداثية المنحنية $s(t) = 2t^2$ ، السرعة حسب معرفتنا هي: $v = \dfrac{ds}{dt}$

نحسب هذه السرعة: $v = \dfrac{ds}{dt} = 4t$. هذا يقودنا إلى الجزم أن x و y هما من **الدرجة الثانية للزمن**.

و عليه يمكننا كتابة:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha t^2 + \beta t + x_0 \Rightarrow v_x = 2\alpha t + \beta \\ y = \gamma t^2 + \delta t + y_0 \Rightarrow v_y = 2\gamma t + \delta \end{array}\right| \Rightarrow v^2 = \left(4\alpha^2 t^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta .t\right) + \left(4\gamma^2 t^2 + \delta^2 + 4\gamma\delta .t\right)$$

ننظم المعادلة الأخيرة على الشكل:

$$v^2 = \left(4\alpha^2 + 4\gamma^2\right)t^2 + \left(4\alpha\beta + 4\gamma\delta\right)t + \beta^2 + \delta^2$$

$$v^2 = 4t^2$$

بمطابقة المعادلتين نحصل على جملة ثلاث معادلات ذات ثلاثة مجاهيل:

$$\left(4\alpha^2 + 4\gamma^2\right)t^2 = 4t^2 \rightarrow (1)$$

$$\left(4\alpha\beta + 4\gamma\delta\right)t = 0 \rightarrow (2)$$

$$\beta^2 + \delta^2 = 0 \rightarrow (3)$$

من (3) نستنتج : $\beta = \delta = 0$ ، من الشروط الابتدائية نستنتج أن $x_0 = -2$ و $y_0 = 0$.

إذن المعادلتان الزمنيتان للحركة هما:

$$x = \alpha t^2 - 2 \ , \ y = \gamma t^2 \rightarrow (4)$$

و يبقى تعين α و γ.

نعوّض x في معادلة المسار لنحصل على: $y = (x+2) = 3\left(\alpha t^2 - 2 + 2\right) \Rightarrow y = 3\alpha t^2 \rightarrow (5)$

نساوي بين المعادلتين (4) و (5) لنحصل على قيمة γ: $y = 3\alpha t^2 = \gamma t^2 \Rightarrow \gamma = 3\alpha$

كما نحصل من المعادلة (1) على $4\alpha^2 + 4\gamma^2 = 4$

إذن:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = 3\alpha \\ 4\alpha^2 + 4\gamma^2 = 4 \end{array}\right| \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \ , \ \gamma = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

بما أن s يتزايد مع تزايد y لا نقبل إلاّ الجذرين الموجبين، و بالتعويض في المعادلتين (4):

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{2}{5}}t^2 - 2 \ , \ y = 3\sqrt{\frac{2}{5}}t^2}$$

التمرين 17.4:

1/ معادلة المسار :نحذف الزمن ما بين المعادتين الزمنيتين فنحصل على y : $t = \dfrac{1}{2}x \Rightarrow \boxed{y = x^2 - 2x}$

المسار **قطع مكافئ**.

2/ سرعة المتحرك: نشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 2 \\ v_y = 8t-4 \end{array}\right| \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{(8t-4)^2 + 4}} \left(ms^{-1}\right)$$

3/ تسارع المتحرك: نشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن:

$$\left.\begin{array}{l} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 8 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = 8ms^{-2} = C^{te}}$$

4/ التسارع المماسي مساير لشعاع السرعة:

$$a_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{a_T = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{(8t-4)^2 + 4}}} \left(ms^{-2}\right)$$

التسارع الناظمي يساوي:

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow \boxed{a_N = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^2 + 4\right]}}} \left(ms^{-2}\right)$$

5/ نصف قطر الانحناء:

$$a_N = \frac{v^2}{r} \ , \ r = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{r = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^3 + 4\right]}}} (m)$$

التمرين 18.4:

1/ بحذف الزمن مابين المعادلتين الوسيطيتين ،و ذلك بتربيعهما و جمعهما طرفا لطرف ، نحصل على معادلة المسار $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$. المسار المتبّع من قبل المتحرّك هو **دائرة مركزها** O **و نصف قطرها** $R = 2$.

2/ مركبتا شعاع السرعة:

$$v_x = -\sin\frac{t}{2} \ , \ v_y = \cos\frac{t}{2} \ ; \ v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v^2 = 1 \ , \ \boxed{v = \frac{ds}{dt} = 1ms^{-1}}$$

3/ تكامل السرعة $v = \dfrac{ds}{dt}$ تعطينا المعادلة الزمنية بالإحداثيات المنحنية:

$$s = \int v.dt \Rightarrow v = t + C$$

و بما أن في $t = 0$ ، $s = 0$ فإن $C = 0$ و المعادلة الزمنية هي: $\boxed{s = t}$

4/ نشتق السرعة بالنسبة للزمن لنحصل على التسارع:

$$a_x = -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} \;\; ; \;\; a_y = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \;\; ; \;\; \boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 = 0,25ms^{-2}}$$

في قاعدة فرينت: $\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = 0}$, $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow \boxed{a_N = 0,5ms^{-2}}$

5/ نصف قطر الانحناء: $R = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{R = 2m}$

6/ التسارع الزاوي يساوي مشتق السرعة الزاوية بالنسبة للزمن: $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = 0,2t$

وعليه فإن السرعة الزاوية هي: $\omega = \int 0,2t.dt \Rightarrow \omega = 0,1t^2 + C$

و بما أن في $t = 0$ ، $s = 0$ ، فإن $C = 0$ و السرعة الزاوية تساوي: $\boxed{\omega = 0,1t^2}$

يمكننا الآن استنتاج السرعة الخطية: $v = \omega R = 0,1Rt^2 \Rightarrow \boxed{v = 0,2t^2}$

تبلغ السرعة القيمة $10ms^{-2}$ في اللحظة : $10 = 0,2t^2 \Rightarrow \boxed{t = 7,1s}$

نكامل السرعة الزاوية فنحصل على الزاوية الممسوحة و من ثمّة نحسب المسافة المقطوعة:

$$\theta = \frac{0,1}{3}t^3 \;\; , \;\; s = R\theta = \frac{0,1}{3}.2.(7,1)^3 \Rightarrow \boxed{s = 23,9m}$$

التمرين 19.4:

1/ انطلاقا من مختلف العبارات المعروفة يمكن حساب شعاع سرعة المتحرّك:

$$\vec{r} = r.\vec{u}_r = \frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r \;\; ; \;\; \theta = \frac{t}{b} \;\; ; \;\; \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta \;\; ; \;\; \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}_r \Rightarrow \vec{v} = -\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r + \frac{r_0}{b}.e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta \;\; ; \;\; \boxed{\vec{v} = \frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right)}$$

2/ لحساب الزاوية $\alpha = (\vec{v},\vec{u}_\theta)$ نستغل خصائص الجداء السلمي:

$$\vec{v}.\vec{u}_\theta = v.u_\theta.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta}$$

نعوض كل من $\vec{v}$ و v بعبارتيهما:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta} = \frac{\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right).\vec{u}_\theta}{\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_\theta} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{u_\theta} = 1 \Rightarrow \boxed{(\vec{v},\vec{u}_\theta) = \alpha = 0} \;\; ; \;\; \vec{v} \,//\, \vec{u}_\theta$$

$$-\vec{u}_r.\vec{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \vec{u}_\theta.\vec{u}_\theta = 1 \;\; , \;\; u_\theta = 1$$

النتيجة تدلّ على أن $\vec{v}$ و $\vec{u}_\theta$ لهما نفس الجهة (الحامل).

3/ لحساب شعاع التسارع نشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن(العبارة مبرهن عليها في الدرس):

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}} - \frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_r + \left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta}$$

4/ لحساب الزاوية $\beta = (\vec{a},\vec{u}_N)$ نستغل خصائص الجداء السلمي:

$$\vec{a}.\vec{u}_N = a.u_N.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N}$$

نعوض كل من $\vec{a}$ و a بعبارتيهما:

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N} = \frac{-2\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{-2\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_N} = \frac{\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{u_N} \rightarrow (1)$$

رأينا في السؤال (2) أن $\vec{v}$ و $\vec{u}_\theta$ لهما نفس الجهة أي $(\vec{v} = v.\vec{u}_\theta)$ ، كما أن $\vec{v} = v.\vec{u}_T$، و عليه فإن $\vec{u}_\theta$ و $\vec{u}_T$ متوازيان ممّا يسمح لنا بكتابة:

$$\vec{u}_\theta = u_\theta.\vec{u}_T$$

نعوّض الآن $\vec{u}_\theta$ في (1): $\cos\beta = \frac{u_\theta \vec{u}_T.\vec{u}_N}{u_N}$

و بما أن $\vec{u}_T.\vec{u}_N = 0$ فإن $\vec{a} \perp \vec{u}_N \Leftarrow \cos\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{2} rad}$

التمرين 20.4:

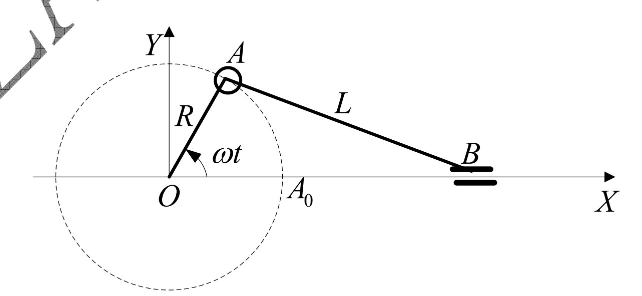
1/ نلاحظ من الشكل أن الفاصلة اللحظية للنقطة B هي المعادلة الزمنية المطلوبة و تساوي:

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)^2$$

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2.OA.OB.\cos\omega t$$

$$L^2 = x^2 + R^2 - 2Rx\cos\omega t \Leftrightarrow L^2 = x^2 + R^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) - 2Rx\cos\omega t$$

$$L^2 = \left(x - R\cos\omega t\right)^2 + R^2\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{x = R\cos\omega t + \left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}$$



نتحقق أنّ $x = R + L$ لمّا $\omega.t = 0$

2/ لحظات انعدام السرعة:

نحسب أولا عبارة السرعة: $v = \frac{dx}{dt} = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}\right)$

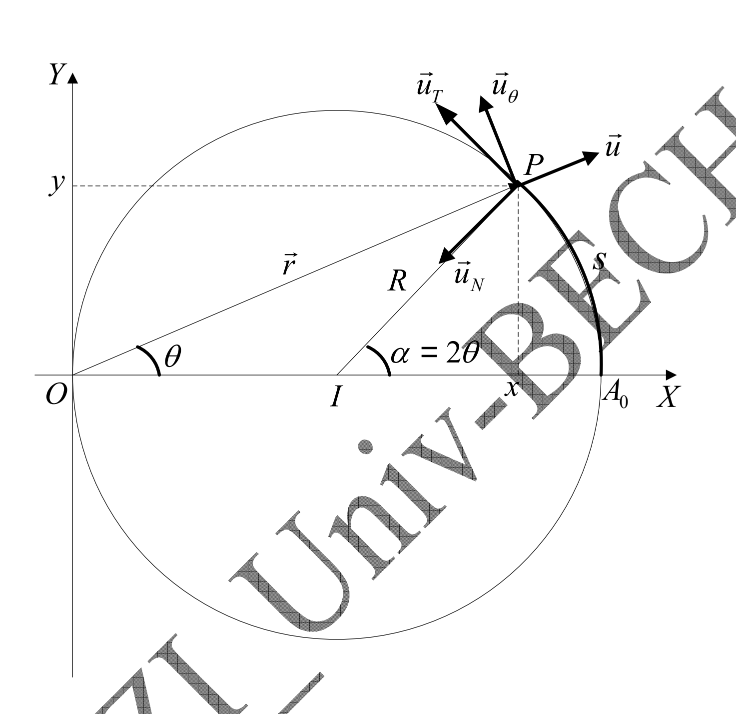
تنعدم السرعة عند:

$$v = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin\omega t\right)^{1/2}}\right) = 0$$

$$\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow \omega.t = k.\pi \Rightarrow \boxed{t = k\frac{\pi}{\omega}}$$

التمرين 21.4:

1/ نلاحظ من الشكل أن: $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} \Rightarrow R^2 = R^2 + r^2 - 2R.r.\cos\theta$



إذن المعادلة القطبية للدائرة هي: $r^2 = 2R.r.\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = 2R.\cos\theta}$

المعادلة الكارتيزية للدائرة:

$$\left.\begin{array}{l} r = 2R\cos\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{R} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2R\dfrac{x}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2R.x = 0}$$

2/ القاعدة القطبية للنقطة P ممثلة على الشكل.

لحساب المركبات القطبية للسرعة و التسارع ننطلق من عبارة شعاع الموضع:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r.\vec{u}$$

الاشتقاق الأول بالنسبة للزمن يعطينا عبارة شعاع السرعة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}.\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\\ r=2R\cos\theta\\ \dot{r}=-2R\dot{\theta}\sin\theta\end{array}\right|\Rightarrow \vec{v}=-2R\dot{\theta}.\sin\theta.\vec{u}_r+2R\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v}=2R\dot{\theta}\left(-\sin\theta.\vec{u}_r+\cos\theta.\vec{u}_\theta\right)}\rightarrow(1)$$

الاشتقاق الثاني بالنسبة للزمن يعطينا عبارة شعاع التسارع:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta\\ r=2R\cos\theta\\ \dot{r}=-2R\dot{\theta}\sin\theta\\ \ddot{r}=-2R\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\end{array}\right|\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}=-2R\left(2\dot{\theta}^2.\cos\theta+\ddot{\theta}.\sin\theta\right)\vec{u}_r+2R\left(\ddot{\theta}.\cos-2\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{u}_\theta}\rightarrow(2)$$

/3

• عبارة s بدلالة θ:

نذكر هنا بخاصية هندسية تخص الدائرة: أن الزاويتان اللتان تحصران نفس القوس من الدائرة ، إحداهما يقع رأسها في المركز تساوي ضعف الأخرى التي يقع رأسها على المحيط . أنظر الشكل:

$$\boxed{\alpha=2\theta}\quad \boxed{s=\overset{\frown}{AP}=R.\alpha=2R\theta}$$

• القاعدة الذاتية $\left(\vec{u}_T,\vec{u}_N\right)$ لـــ P ممثلة على الشكل.

• مركبتا شعاع السرعة: $\boxed{\vec{v}=v.\vec{u}_T=2R\dot{\theta}.\vec{u}_T}\rightarrow(3)$

• بالنسبة للتسارع:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{a}_N+\vec{a}_T\\ \vec{a}_N=\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N=4R\dot{\theta}^2\vec{u}_N\\ \vec{a}_T=\dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T=2R\ddot{\theta}\vec{u}_T\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\vec{a}=\underbrace{4R\dot{\theta}^2\vec{u}_N}_{a_N}+\underbrace{2R\ddot{\theta}\vec{u}_T}_{a_T}}\rightarrow(4)$$

لإيجاد من جديد عبارتي السرعة و التسارع في القاعدة القطبية يكفي التعبير عن شعاعي الواحدة للقاعدة الذاتية بالإحداثيات القطبية:

من الشكل دائما نستنتج:

$$\vec{u}_N=-\cos\theta.\vec{u}_r-\sin\theta.\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_T=-\sin\theta.\vec{u}_r+\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

نعوض في المعادلتين (3) و (4) لنحصل على المعادلتين السابقتين (1) و (2):

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T = 2R\dot{\theta}.\left(-\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)} = (1)$$

ننظم هذه المعادلة الأخيرة فينتج لدينا:

$$\boxed{\vec{a} = -2R\left(2.\dot{\theta}^2.\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right).\vec{u}_r + 2R\left(\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right).\vec{u}_\theta} = (2)$$

4/ السرعة الزاوية الآن أصبحت ثابتة.

- الزاوية θ الممسوحة من قبل النقطة P خلال المدة t هي: $\alpha = 2\theta = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\omega t}{2}}$

أما عبارة فهي: $\boxed{r = 2R\cos\dfrac{\omega}{2}t}$

- عبارتا السرعة و التسارع: نعلم من البداية أن $\boxed{\dot{\theta} = \dfrac{\omega}{2}}$ و نعوض في مختلف العبارات $(1),(2),(3)$ و (4) ، θ و $\dot{\theta}$ بقيمتيهما:

❖ **بالإحداثيات القطبية:** نعوض في $(1),(2)$

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\left(-\sin\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_r + \cos\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_\theta\right)}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2R\omega^2.\cos\frac{\omega}{2}t\right).\vec{u}_r - \left(R\omega^2.\sin\frac{\omega}{2}t\right)\vec{u}_\theta}$$

❖ **بالإحداثيات الذاتية(فرينت):** نعوض في $(3),(4)$

$$\boxed{\vec{a} = R\omega^2.\vec{u}_N} \qquad \boxed{\vec{v} = R\omega.\vec{u}_T}$$

D-IV/الحركات في الفضاء
MOUVEMENT DANS L'ESPACE

لدراسة حركة نقطة مادية في الفضاء و الذي يتميز بثلاثة أبعاد، نستعمل في الغالب الإحداثيات الأسطوانية و الإحداثيات الكروية.

1/ دراسة الحركة بالإحداثيات الأسطوانية: (étude du mouvement en coordonnées cylindriques)

❖ **موضع المتحرك:** (الشكل14.4)

يحدد موضع المتحرك M بإحداثيته الجبرية z و بإحداثيتيه القطبيتين ρ و φ لمسقطه m على المستوى XOY.

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} \rho(t) \\ \varphi(t) \\ z(t) \end{array} \right.$$

الشكل 14.4: قاعدة الإحداثيات الأسطوانية

العلاقة بين أشعة القاعدة $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ و $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u}_\rho = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{array}} \qquad (39.4)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z} \qquad (40.4)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho.\sin\varphi + \vec{k}.z} \qquad (41.4)$$

يلاحظ الطالب أن هذه العبارة مكافئة للعبارة (6.3).

- الإنتقال العنصري يعطى بالعبارة:

$$\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2} \qquad (42.4)$$

❖ **سرعة المتحرك:**

كما تعلمنا، نقوم باشتقاق شعاع موضع المتحرك المعبر عنه بالإحداثيات الأسطوانية. ننتبه هنا إلى أن، عكس حالة الحركة الدائرية المنتظمة، فإن نصف القطر

القطبي ρ هو الآن تابع زمني. نسجل كذلك أن $\vec{u}_z=\vec{k}$ ثابت، عكس $\vec{u}_\varphi$ المتغير مع الزمن.

$$\vec{r}=\rho.\vec{u}_\rho+z.\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{v}=\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{u}_\rho\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

بتذكّر العبارة (25.4) الخاصة بمشتقاتي كل من $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ و $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$ يمكن كتابة:

$$\boxed{\vec{v}=\dot{\rho}.\vec{u}_\rho+\rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi+\dot{z}.\vec{u}_z} \qquad (43.4)$$

لاحظ أن للسرعة ثلاثة مركبات:**قطرية** $(\vec{v}_r)$، **عرضية** $(\vec{v}_\varphi)$ و **علوية** $(\vec{v}_z)$.

شدة السرعة بالإحداثيات الأسطوانية تحسب بالعبارة:

$$\boxed{v=\sqrt{\dot{\rho}^2+(\rho.\dot{\varphi})^2+\dot{z}^2}} \qquad (44.4)$$

❖ **تسارع المتحرك:**

بمواصلة عملية الاشتقاق نحصل على العبارة الشعاعية للتسارع:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{\rho}.\vec{u}_\rho+\dot{\rho}.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\dot{\rho}.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi+\rho.\ddot{\varphi}.\vec{u}_\varphi+\rho.\dot{\varphi}.\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}+\ddot{z}.\vec{u}_z$$

باستعمال ترميز نيوتن و العبارة (25.4) نحصل على العبارة النهائية:

$$\boxed{\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho+(\rho.\ddot{\varphi}+2.\dot{\rho}.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi+\ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad (45.4)$$

يمكن كتابة نفس العبارة على الشكل التالي:

$$\boxed{\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi+\ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad (46.4)$$

إذا كان $z=0$ و $\rho=R=C^{te}$ ، تظهر لنا العبارة السابقة (31.4) لتسارع الحركة الدائرية المنتظمة.

لاحظ أن للتسارع ثلاثة مركبات:**قطرية** $(\vec{a}_r)$، **عرضية** $(\vec{a}_\varphi)$ **و علوية** $(\vec{a}_z)$.

2/ دراسة الحركة بالإحداثيات الكروية:(étude du mouvement en coordonnées sphériques)

❖ **موضع المتحرك**(الشكل15.4)

في هذا النظام فإن موضع المتحرك معرف بالعلاقة:

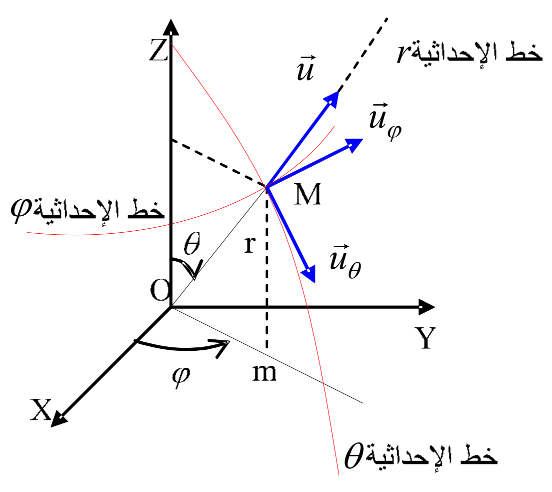
$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{vmatrix} \quad \boxed{\overrightarrow{OM}=\vec{r}=r.\vec{u}_r} \qquad (47.4)$$

- نذكّر بالعلاقات 17.4 و 18.4 بين أشعة القاعدة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ و $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{u}_r=\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i}+\sin\theta.\sin\varphi.\vec{j}+\cos\theta.\vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi=-\sin\varphi.\vec{i}+\cos\varphi.\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta=\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i}+\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j}-\sin\theta.\vec{k}$$



الشكل15.4 قاعدة الإحداثيات الكروية

- الإنتقال العنصري يعطى بالعبارة:

$$\boxed{ds^2=dr^2+(r\sin\theta.d\varphi)^2+(rd\theta)^2} \qquad (48.4)$$

▲ على الطالب أن لا يحفظ الحروف و إنما مدلولاتها: لاحظ أن $\varphi=(OX,Om)$ و $\theta=(OZ,OM)$ و قد يجد في مراجع أخرى عكس هذا.

❖ **سرعة المتحرك**: نشتق عبارة شعاع الموضع: $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\vec{u}}$

نشتق الشعاع $\vec{u}$ ثم ننظم العبارة الجديدة فنحصل على:

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta}_{\vec{u}_\theta}\right] + \dot{\varphi}\sin\theta\left[\underbrace{-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

أي أن:

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta.\vec{u}_\varphi$$

بالتعويض نصل إلى العبارة النهاية لشعاع السرعة:

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi$$

تتجلى لنا المركبات الكروية الثلاثة لشعاع السرعة:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi \qquad (49.4)$$

القاعدة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ المتعامدة المباشرة و هي أشعة تابعة لموضع M و بالتالي للزمن معرفة بالمعادلات الزمنية $r(t)$ ، $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ ، تسمح بالوصول إلى القيم الجبرية v_r ، v_θ و v_φ للمركبات الكروية لشعاع السرعة و من ثمة تحديد شعاع السرعة.

❖ **تسارع المتحرك:** بمتابعة الاشتقاق نتوصل إلى عبارة التسارع:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}.\vec{u}_r + (r\sin\varphi)\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi\right]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_\theta + a^2{}_\varphi}$$

نعطي في ما يلي نتيجة اشتقاق شعاع السرعة و **على الطالب** أن يتأكد من هذه النتيجة:

$$\begin{aligned}\vec{a} = &(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta).\vec{u}_r + \\ &(r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta.\cos\theta).\vec{u}_\theta + \\ &(r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta)\vec{u}_\varphi\end{aligned} \qquad (50.4)$$

هنا كذلك، بمعرفة المعادلات الزمنية $r(t)$ ، $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ نتوصل إلى القيم الجبرية

a_r ، a_θ و a_φ للمركبات الكروية لشعاع التسارع و بالتالي تحديد الشعاع $\vec{a}$.

مثال 9.4:

حركة نقطة مادية M معرفة في الإحداثيات الأسطوانية بمركبتي شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و الزاوية القطبية θ حيث: $\theta=ct^2$; $\overrightarrow{OM}=k.\vec{u}_\rho+bt.\vec{k}$، علما أن k,b,c ثوابت موجبة.

1/ أحسب السرعة و التسارع بدلالة الزمن.

2/ أحسب نصف قطر الإنحناء بعد دورة كاملة حول OZ.

الحل:

1/ لحساب السرعة $\vec{v}$ نشتق شعاع الموضع:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(k\vec{u}_\rho+bt\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}=k\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+b\vec{k}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{v}=k.\dot{\theta}\vec{u}_\theta+b\vec{k}\\ \theta=ct^2\Rightarrow\dot{\theta}=2ct\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\vec{v}=2kct\vec{u}_\theta+b\vec{k}}$$

شدة شعاع السرعة: $\boxed{v=\sqrt{4k^2c^2t^4+b^2}}$

لحساب التسارع نشتق شعاع السرعة:

$$a=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(2kct.\vec{u}_\theta+b\vec{k})\Rightarrow a=2kc\frac{d}{dt}(t.u_\theta)\Rightarrow a=2kc\left[t.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}+\vec{u}_\theta.1\right]$$

$$a=2kc\left[-t.\dot{\theta}.\vec{u}_\rho+\vec{u}_\theta\right]\Rightarrow a=2kc\left[-t.2ct.\vec{u}_\rho+\vec{u}_\theta\right]\Rightarrow \boxed{a=2kc\left[-2ct^2.\vec{u}_\rho+\vec{u}_\theta\right]}$$

شدة شعاع التسارع:

$$\boxed{a=2kc\sqrt{4c^2t^4+1}}$$

2/ حساب نصف قطر الإنحناء (أو التقوس) (rayon de courbure):

نحسب المدة اللازمة للقيام بدور واحد: $\theta=2\pi=ct^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{\theta}{c}}=\sqrt{\frac{2\pi}{c}}$

ثم نعوض الزمن في معادلة التسارع الناظمي و بعده نحسب نصف قطر الإنحناء:

(على الطالب إنجاز هذا الحساب دون كلل و لا ملل !!!).

$$R = \frac{v^2}{a_N} \quad ; \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \;;$$

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{4k^2c^2t}{\sqrt{4k^2c^2t + b^2}} \neq \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}!!!!!}$$

$$\boxed{a_N = 2kc\frac{\sqrt{16k^2c + b^2}}{\sqrt{k^2c^2t^2 + b^2}}}$$

$$R_{(t)} = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\left(4k^2c^2t + b^2\right)^{3/2}}{2kc(16k^2c^4t^6 + 4c^2b^2t^4 + b^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{R\left(\sqrt{\frac{2\pi}{c}}\right) = \frac{\left(8\pi k^2c^2t + b^2\right)^{3/2}}{2kc(128k^2c\pi^3 + b^2\left(1 + 16\pi^2\right))^{1/2}}}$$

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 4.22

On donne les équations du mouvement d'un point M dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$x=\frac{1}{2}bt^2\ ,\ y=ct\ ,\ z=\frac{3}{2}bt^2$$

Où b,c sont des constantes positives.

1/ Trouver la vitesse et l'accélération ainsi que leurs modules.

2/ Quelle est l'équation de la trajectoire du point m qui représente la projection verticale du point mobile M sur le plan XOY .

التمرين 22.4:

تعطى المعادلات لحركة نقطة مادية M في المعلم $:\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$$x=\frac{1}{2}bt^2\ ,\ y=ct\ ,\ z=\frac{3}{2}bt^2$$

حيث c,b ثابتان موجبان.

1/ أوجد السرعة و التسارع وطويلتيهما.

2/ ما هي معادلة المسار للنقطة m التي تمثل المسقط العمودي للنقطة M المتحركة على المستوى XOY .

Exercice 4.23

Soit la trajectoire définie par :

$$\vec{r}=\vec{i}.3\cos 2t+\vec{j}.3\sin 2t+\vec{k}.(8t-4)$$

1/ Trouver le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire.

2/ Si $\vec{\ }$ est le vecteur position d'un point se déplaçant sur C au temps t , vérifier que dans ce cas $\vec{v}=v.\vec{T}$.

التمرين 23.4:

ليكن المسار C المعرّف بـــ:

$$\vec{r}=\vec{i}.3\cos 2t+\vec{j}.3\sin 2t+\vec{k}.(8t-4)$$

1/ أوجد شعاع الواحدة $\vec{T}$ المماسي للمسار.

2/ إذا كان $\vec{\ }$ هو شعاع موضع نقطة متحركة على المسار C في اللحظة t ، تحقق أن في هذه الحالة $.\vec{v}=v.\vec{T}$

Exercice 4.24

Un point M décrit une hélice circulaire d'axe OZ .

Ses équations horaires sont :

$$x=R\cos\theta\ ;\ y=R\sin\theta\ ,\ z=h\theta$$

R est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ l'angle que fait avec OX la projection OM' de OM sur XOY .

1/ Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.

2/ Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan XOY un angle constant.

3/ Montrer que le mouvement de rotation est uniforme, que le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan XOY . Calculer le rayon de courbure.

التمرين 24.4:

ترسم نقطة مسارا حلزونيا دائريا حول المحور OZ ، معادلاته الزمنية هي:

$$x=R\cos\theta\ ;\ y=R\sin\theta\ ,\ z=h\theta$$

R يمثل نصف قطر الأسطوانة للدوران التي يرتسم عليها الحلزون، h ثابت و θ الزاوية التي يصنعها OX مسقط OM' لــ OM على XOY .

1/ إعط بالإحداثيات الأسطوانية عبارتي السرعة والتسارع.

2/ بيّن أن شعاع السرعة يصنع زاوية ثابتة مع المستوى XOY .

3/ بيّن أن الحركة الدورانية منتظمة، و أن شعاع التسارع يمرّ من محور الأسطوانة و موازي للمستوى XOY . أحسب نصف قطر الانحناء.

Exercice 4.25

Un mobile se déplace dans l'espace suivant la loi :

$$x=R\cos\omega t\ ;\ y=R\sin\omega t\ ,\ z=\alpha t$$

Où $\alpha,\ \omega,\ R$ sont des constantes positives.

1/ soit m la projection de M dans le plan XOY :

التمرين 25.4:

ينتقل متحرّك في الفضاء وفق القانون:

$$x=R\cos\omega t\ ;\ y=R\sin\omega t\ ,\ z=\alpha t$$

حيث $\alpha,\ \omega,\ R$ ثوابت موجبة.

a/ Quelle est la nature de la trajectoire de m dans le plan XOY ? b/ Quelle est la nature du mouvement de m suivant l'axe OZ ? c/ En déduire la nature de la trajectoire du mobile M . 2/ dans le système des coordonnés cylindriques : a/ écrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et représenter la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ en un point M de l'espace. b/ trouver la vitesse et l'accélération de M , ainsi que leurs modules. Déterminer leurs directions puis les représenter en un point de l'espace. d/ en déduire le rayon de courbure.	1/ ليكن m مسقط M في المستوى XOY : ا/ ما هو مسار m في XOY ؟ ب/ ما هو نوع حركة m وفق المحور OZ ؟ ج/ إستنتج نوعية مسار المتحرك M . 2/ في جملة الإحداثيات الأسطوانية: ا/ أكتب عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ و مثّل القاعدة $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ عند نقطة M من الفضاء. ب/ أوجد السرعة و التسارع لـــ M ، و طويلتيهما. حدّد جهتيهما ثم مثلهما عند نقطة من الفضاء. ج/ إستنتج نصف قطر الانحناء.

Exercice 4.26 1/ A partir des expressions de vecteurs unitaires de la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ en coordonnées cartésienne, s'assurer des expressions suivantes : $\dot{\vec{u}}_\theta=-\dot{\theta}.\vec{u}_r+\dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi$ $\dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi$ $\dot{\vec{u}}_\varphi=-\dot{\varphi}\left(\sin\theta.\vec{u}_r+\cos\theta.\vec{u}_\theta\right)$ 2/ Montrer que l'accélération dans la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ s'écrit : $\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r+$ $+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta\right)\vec{u}_\theta+$ $+\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}.\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$	**التمرين 26.4:** 1/ انطلاقا من عبارات أشعة واحدة القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ بالإحداثيات الكارتيزية ، تأكد من العلاقات التالية: $\dot{\vec{u}}_\theta=-\dot{\theta}.\vec{u}_r+\dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi$ $\dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi$ $\dot{\vec{u}}_\varphi=-\dot{\varphi}\left(\sin\theta.\vec{u}_r+\cos\theta.\vec{u}_\theta\right)$ 2/ برهن أن التسارع في القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ يكتب: $\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r+$ $+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta\right)\vec{u}_\theta+$ $+\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}.\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{u}_\varphi$

Exercice 4.27 Dans le système des coordonnées sphériques $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$, un point M se déplace sur la surface d'une sphère de rayon R. Ses deux coordonnées sphériques sont: $\theta=\left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{6}rad\quad,\quad\varphi=\omega t^2,$ Avec ω constante positive. 1/ Partant de l'expression du vecteur position en coordonnées sphériques : a/ trouver la vitesse et l'accélération de ce mobile dans la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$, b/ calculer les modules de la vitesse et de l'accélération, d/ en déduire l'accélération normale. 2/ Partant cette fois de l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes : a/ trouver la vitesse et l'accélération dans la	**التمرين 27.4:** في جملة الإحداثيات الكروية $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ تتحرك نقطة مادية M على سطح كرة نصف قطرها R . إحداثيتاها الكرويتان هما: $\theta=\left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{6}rad\quad,\quad\varphi=\omega t^2$ ، مع ω ثابت موجب. 1/ انطلاقا من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية: ا/ أوجد السرعة و التسارع لهذه النقطة في القاعدة $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta\right)$ ، ب/ أحسب طويلتي السرعة و التسارع، ج/ إستنتج التسارع الناظمي. 2/ انطلاقا هذه المرة من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية: ا/ أوجد السرعة و التسارع في القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ثم

base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ puis calculer de nouveau leurs modules et vérifier qu'ils coïncident avec les résultats de la question 1/b, 3/ a/ Quelle est la trajectoire du point M ? la représenter qualitativement, b/ Quelle est la nature du mouvement du point M ?	احسب من جديد طويلتيهما و تأكد من تطابقهما مع نتائج السؤال 1/ب، 3/ ا/ما هو مسار النقطة M ؟ مثل المسار كيفيا. ب/ ما طبيعة حركة النقطة M ؟

Corrigés des exercices 4.22 à 4.27 — حلول التمارين من 22.4 إلى 27.4

التمرين 22.4:

1/ شعاع السرعة:

نكتب شعاع الموضع: $\vec{r} = \frac{1}{2}bt^2.\vec{i} + ct.\vec{j} + \frac{3}{2}bt^2.\vec{k}$

نشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن لنحصل على شعاع السرعة:

$$\dot{x} = v_x = bt \ , \ \dot{y} = v_y = c \ , \ \dot{z} = v_z = 3bt$$

$$\vec{v} = bt.\vec{i} + c.\vec{j} + 3bt.\vec{k} \quad ; \quad v = \sqrt{10(bt)^2 + c^2}$$

نشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن لنحصل على شعاع التسارع:

$$\ddot{x} = a_x = b \ , \ \ddot{y} = a_y = 0 \ , \ \ddot{z} = a_z = 3b$$

$$\vec{a} = b.\vec{i} + 3b.\vec{k} \quad ; \quad a = 2b$$

2/ معادلة مسار النقطة m: نحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$.

$$x = \frac{1}{2}bt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{b}} \ , \ y = c\sqrt{\frac{2x}{b}}$$

التمرين 23.4:

1/ الشعاع الماسي للمسار هو شعاع السرعة $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$،

شعاع السرعة هو: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$

طويته تساوي: $v = \sqrt{36+64} \Rightarrow v = 10m.s^{-2}$

شعاع الواحدة $\vec{T}$ المماسي للمسار C يحمله شعاع السرعة $\vec{v}$:

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}$$

2/ إذا كان $\vec{r}$ هو شعاع موضع النقطة M في اللحظة t فإن $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{i}.6\sin 2t + \vec{j}.6\cos 2t + 8.\vec{k}$$

$$\vec{v} = 10\left(-\frac{3}{5}\sin 2t.\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t.\vec{j} + \frac{4}{5}.\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = 10.\vec{u}_T = 10\vec{T} \Rightarrow \vec{v} = v.\vec{T}$$

التمرين 24.4:

1/ نعلم أن شعاع الموضع بالإحداثيات الأسطوانية يكتب: $\overline{OM} = \vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

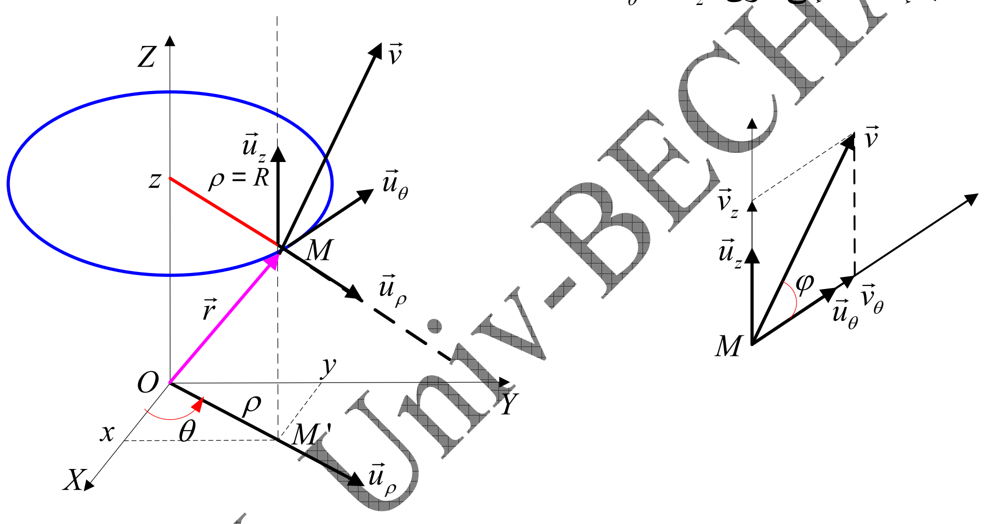
نستنتج شعاع السرعة : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z}.\vec{u}_z$

$$\left.\begin{array}{l}\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{z} = h\dot{\theta}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

شعاع التسارع: $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = R.\dot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z$

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{\theta} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_\rho\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_\rho + R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + h.\ddot{\theta}.\vec{u}_z}$$

2/ الشعاع $\vec{u}_\theta$ يوازي المستوى OXY، و عليه فإن الزاوية التي يصنعها شعاع السرعة مع المستوي OXY تساوي الزاوية التي يصنعها الشعاع $\vec{u}_\theta$ مع المستوي OXY كما هو موضّح على الشكل، بالإضافة إلى كون $\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_z$.



$$tg\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{v_z}{v_\theta} = \frac{h\dot{\theta}}{R\dot{\theta}} \Rightarrow \boxed{tg\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \frac{h}{R} = Cte}$$

3/ الحركة دورانية منتظمة، هذا يعني أن $\dot{\theta} = \omega = Cte$ و $\vec{a} = -R.\omega^2.\vec{u}_\rho$.
التسارع $\vec{a}$ موازي لـــ $\vec{u}_\rho$ أي مركزي مما يؤكّد أنّه يمرّ من محور الأسطوانة. $\vec{u}_\rho$ ينتمي للمستوى OXY، كما أن $\vec{a}$ موازي لـــ $\vec{u}_\rho$ فهذا يدلّ على أنه موازي للمستوى OXY.
برهنا أن التسارع مركزي ، إذن:

$$\left.\begin{array}{l}r = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{v^2}{a} \\ v^2 = R^2.\omega^2 + h^2.\omega^2 \\ a = R^2.\omega^2\end{array}\right| \Rightarrow r = \frac{R^2\omega^2 + h^2\omega^2}{R\omega^2}, \quad \boxed{r = \frac{R^2 + h^2}{R},}$$

التمرين 25.4:

1/ ا/ حركة النقطة m تتم في المستوى XOY. للحصول على معادلة المسار لهذه النقطة نحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$: $x^2+y^2=R^2$ مسار النقطة m في XOY دائرة مركزها $(0,0)$ و نصف قطرها R.

ب/ على المحور OZ، المعادلة الزمنية $z=\alpha .t$ تبيّن أن الحركة مستقيمة منتظمة شاقوليا.

ج/ مسار المتحرّك هو تركيب الحركة المستوية والحركة الشاقولية أي مسار حلزوني.

2/ في جملة الإحداثيات الأسطوانية:

ا/ شعاع الموضع: $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=R.\vec{u}_\rho+z.\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{r}=\overrightarrow{OM}=\rho.\vec{u}_\rho+z.\vec{u}_z$

ب/ السرعة والتسارع للنقطة M:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\rho}.\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\vec{u}}_\rho+z.\vec{u}_z\\ \dot{\vec{u}}_\rho=\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi=R\omega.\vec{u}_\varphi\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\vec{v}=R\omega.\vec{u}_\varphi+b.\vec{u}_z}\quad,\quad \boxed{v=\sqrt{R^2\omega^2+b^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=R\omega.\dot{\vec{u}}_\varphi\\ \dot{\vec{u}}_\varphi=-\dot{\varphi}.\vec{u}_\rho=-R\omega.\vec{u}_\rho\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\vec{a}=-R\omega^2.\vec{u}_\rho}\quad,\quad \boxed{a=R\omega^2}$$

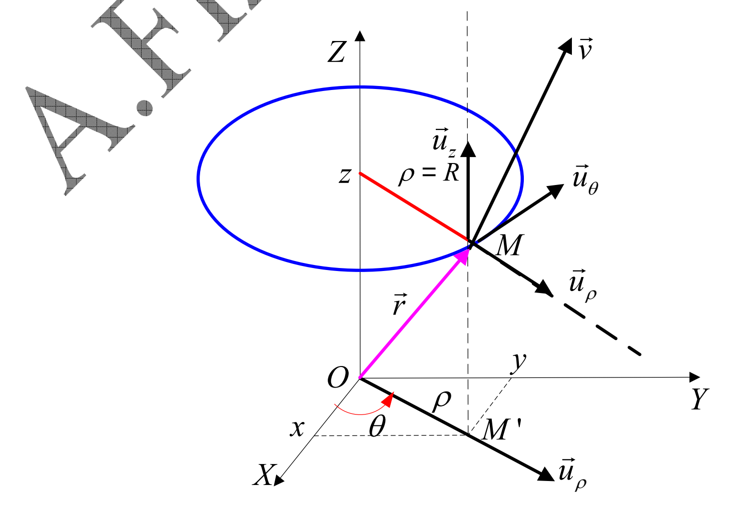
الزاوية التي يصنعها شعاع السرعة مع الشعاع $\vec{u}_\varphi$: حسب الشكل أسفله فإن

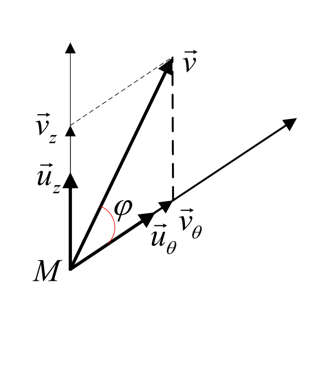
$$\boxed{tg\beta=\frac{v_z}{v_\varphi}=\frac{b}{R\omega}}$$

أما التسارع فهو مركزي أي موجه نحو مركز المسار الدائري.

ج/ نصف قطر الإنحاء:

$$\left.\begin{array}{l}r=\dfrac{v^2}{a_N}\\ a_N^2=a^2-a_T^2\Rightarrow a_N^2=R^2.\omega^4-\left(R^2.\omega^2+b^2\right)\\ a_T^2=R^2.\omega^2+b^2\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{r=\frac{R^2.\omega^2+b^2}{\sqrt{R^2.\omega^2\left(\omega^2-1\right)-b^2}}}$$





التمرين 26.4:

1/ عبارات أشعة الواحدة للقاعدة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_\theta)$ بالإحداثيات الكارتيزية هي:

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\phi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

عبارة $\dot{\vec{u}}$:

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\sin\theta.\sin\varphi.\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot{\varphi}.\sin\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot{\theta}\sin\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_\theta}\right] - \dot{\varphi}.\sin\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi}$$

عبارة $\dot{\vec{u}}_\theta$:

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \dot{\theta}\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\cos\theta.\sin\varphi.\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \dot{\varphi}.\cos\theta.\cos\varphi.\vec{j} - \dot{\theta}\cos\theta.\vec{k}$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\left[\underbrace{\sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}}_{\vec{u}_r}\right] + \dot{\varphi}.\cos\theta.\left[\underbrace{-\sin\varphi.\vec{i} + .\cos\varphi.\vec{j}}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi}$$

عبارة $\dot{\vec{u}}_\varphi$:

$$\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\cos\varphi.\vec{i} - \dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\cos\varphi.\vec{i} + \dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{j}\right] \rightarrow (1)$$

هذه النتيجة ليست هي المطلوبة....

نعود إلى عبارتي $\dot{\vec{u}}$ و $\dot{\vec{u}}_\theta$. نضرب الأولى في $\sin\theta$ ، و الثانية في $\cos\theta$ لنحصل على:

$$\vec{u}_r.\sin\theta = \sin^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \sin\theta.\cos\theta.\vec{k} \rightarrow (2)$$
$$\vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos^2\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos^2\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \cos\theta.\sin\theta.\vec{k} \rightarrow (3)$$

نجمع المعادلتين الجديدتين فينتج:

$$\vec{u}_r.\sin\theta + \vec{u}_\theta.\cos\theta = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}$$

نعوض الآن في عبارة $\dot{\vec{u}}_\varphi$ (1) لتصبح:

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]}$$

2/ البرهان على عبارة التسارع في الإحداثيات الكروية:

ننطلق من عبارة السرعة:

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi$$

نقوم بالاشتقاق بالنسبة للزمن:

$$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}.\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}.\dot{\vec{u}}_\theta + \dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\dot{\vec{u}}_\phi$$

نعوض كل من $\dot{\vec{u}}_\varphi,\dot{\vec{u}}_\theta,\dot{\vec{u}}_r$ بعبارتها الموجودة في 1/ :

$$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}.\left[\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}.\left[-\dot{\theta}.\vec{u}_r + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{u}_\varphi\right] +$$
$$\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\ddot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi + r.\dot{\varphi}.\sin\theta.\left[-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right]$$

ننشر ثم ننظم المعادلة الأخيرة فنحصل على:

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta\right].\vec{u}_r + \dot{r}.\left[\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi\right] +$$
$$\left[r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\phi\right].\vec{u}_\phi +$$
$$\left[r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta\cos\theta\right].\vec{u}_\theta$$

التمرين 27.4

1/ شعاع الموضع بالإحداثيات الكروية يكتب: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}$

ا/ شعاع السرعة في نفس الجملة: $\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}$

$$\left.\begin{array}{l} r = R = Cte \Rightarrow \dot{r} = 0 \\ \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{u}_\varphi \\ \theta = Cte \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \\ \varphi = \omega t^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = 2\omega t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi}$$

شعاع التسارع بنفس الإحداثيات:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = R\omega t.\vec{u}_\varphi \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\dot{\vec{u}}_\varphi \\ \dot{\vec{u}}_\phi = -\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right] \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = R\omega.\vec{u}_\varphi + R\omega t.\left(-\dot{\varphi}.\left[\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]\right)$$

$$\vec{a} = -\dot{\varphi}.R\omega t\sin\theta.\vec{u}_r R\omega.\vec{u}_\varphi - \dot{\varphi}.R\omega t\cos\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2 t^2.\vec{u}_r - \sqrt{3}.R\omega^2 t^2.\vec{u}_\theta + R\omega.\vec{u}_\varphi}$$

ب/ طويلة شعاع السرعة: $\boxed{v = R\omega t}$

طويلة شعاع التسارع:

$$a = \sqrt{\left(-R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(\sqrt{3}.R\omega^2 t^2\right)^2 + \left(R\omega\right)^2}$$

$$\boxed{a = R\omega\sqrt{4\omega^2 t^4 + 1}}$$

ج/ التسارع الناظمي:

$$\left.\begin{array}{l} a_N^2 = a^2 - a_T^2 \\ a_T = \dfrac{dv}{dt} = R\omega \\ a^2 = R^2\omega^2\left[4\omega^2 t^4 + 1\right] \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a_N = 2R\omega^2 t^2}$$

2/ شعاع الموضع بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = R\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{2}R\cos\omega t \\ y = R\sin\theta\sin\varphi = \dfrac{1}{2}R\sin\omega t \\ z = R\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \frac{1}{2}R\cos\omega t^2.\vec{i} + \frac{1}{2}R\sin\omega^2 t.\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}R.\vec{k}}$$

ا/ شعاعا السرعة والتسارع في القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\boxed{\vec{v}=\dot{\vec{r}}=-R\omega t\sin\omega t^2.\vec{i}+R\omega t\cos\omega t^2.\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\left[-R\omega\sin\omega t^2-2R\omega^2t^2\cos\omega t^2\right].\vec{i}+\left[R\omega\cos\omega t^2-2R\omega^2t^2\sin\omega t^2\right].\vec{j}}$$

طويلتا السرعة و التسارع:

$$\boxed{v=R\omega t}\quad ;\quad \boxed{a=R\omega\sqrt{\left[1+4\omega^2t^4\right]}}$$

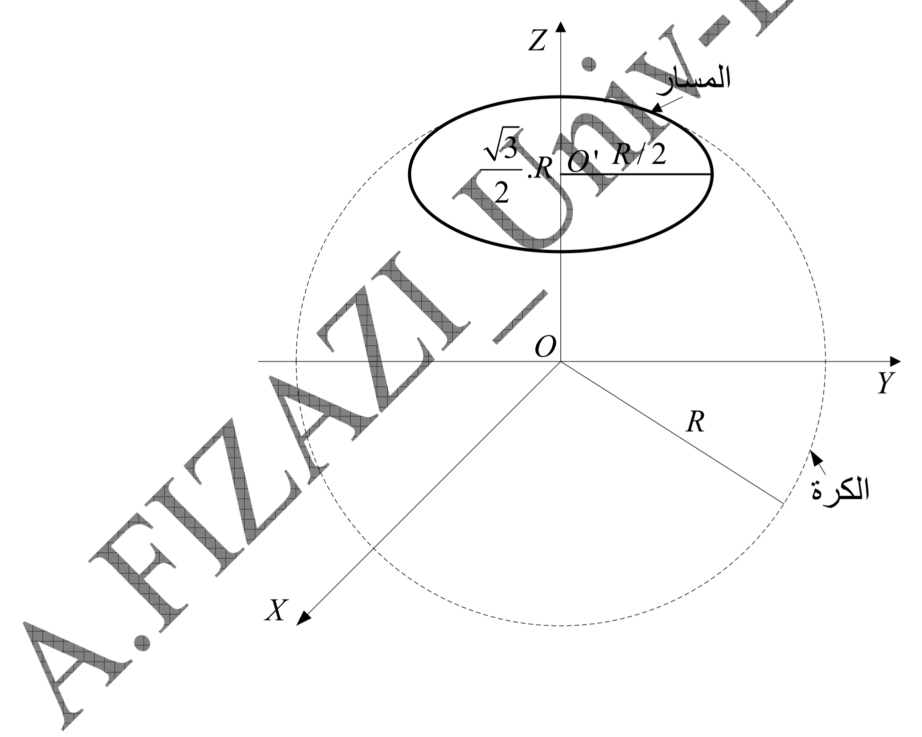
الطويلتان متطابقتان تماما مع نتيجة السؤال 1/ب.

3/ مسار النقطة المتحركة:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=R^2\\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{x^2+y^2=\frac{1}{4}R^2}$$

نستنتج من هذا أن النقطة M ترسم دائرة نصف قطرها $\dfrac{R}{2}$ و مركزها $\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)$. أما شعاع الموضع فهو يرسم مخروطا قمته O و حافته الدائرة المذكورة.

4/ طبيعة الحركة: المسار دائري ، شدة السرعة ثابتة و التسارع المماسي ثابت، إذن الحركة دائرية متغيرو بانتظام.



E-IV/الحـــــركــــة الــــنــســبــيــة
MOUVEMENT RELATIF

1/تغيير المرجع:

❖ **مقدمة:**

قلنا سابقا أن الحركة و السكون مفهومان نسبيان أي أن كل منهما يتعلق بوضع المتحرك بالنسبة للجسم المتخذ كمرجع.

كل الحركات التي درسناها حتى الآن نسبناها إلى معلم ساكن. فما هي سرعة متحرك بالنسبة لمتحرك آخر و هما مرتبطان بنفس المعلم؟ و كيف يكون الحال لو كان الملاحظان منتميان لمعلمين مختلفين الواحد في حركة بالنسبة للآخر؟

يختلف الموضع، المسار ، السرعة و التسارع لنفس المتحرك حسب المعلم المختار من قبل المراقب.

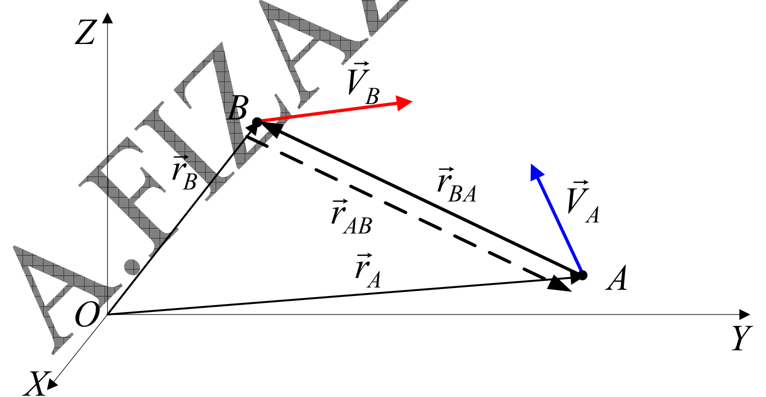
مثلا: نقطة مادية لاصقة على محيط عجلة دراجة:

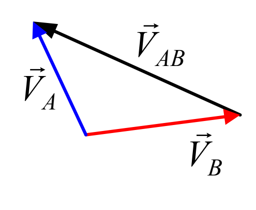
- بالنسبة لمعلم أرضي الحركة غير منتظمة و المسار شكله أقواس متتالية أي مسار دويري (cycloïde).
- بالنسبة لمعلم مرتبط بمحور الدراجة:الحركة منتظمة و المسار دائري.

من الأهمية بمكان معرفة كيف هي مرتبطة الملاحظات المسجلة من قبل مراقبين مرتبطين بمعلمين مختلفين في الحركة الواحد بالنسبة للآخر.

2/السرعة النسبية لمتحركين:

لتكن A و B نقطتان ماديتان متحركتين في المعلم $OXYZ$. نفترض وجود ملاحظ في النقطة O. الشكل16.4





الشكل16.4 : السرعة النسبية لمتحركين

سرعة A بالنسبة للملاحظ O هي: $\vec{V}_A = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$ و نعرّف سرعتها بالنسبة لـــ B بـــ:

$\vec{V}_{AB} = \dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$ ، حيث $\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$.

و منه :

$$\vec{V}_{AB}=\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\frac{d\vec{r}_A}{dt}-\frac{d\vec{r}_B}{dt}\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{AB}=\vec{V}_A-\vec{V}_B} \quad (52.4)$$

سرعة B بالنسبة للملاحظ O هي: $\overrightarrow{V_B}=\frac{d\vec{r}_B}{dt}$ و نعرّف سرعتها بالنسبة لـــ A بـــ:

$\vec{V}_{BA}=\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$ ، حيث $\vec{r}_{BA}=\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$

و منه :

$$\vec{V}_{BA}=\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}=\frac{d\vec{r}_B}{dt}-\frac{d\vec{r}_A}{dt}\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{BA}=\vec{V}_B-\vec{V}_A} \quad (53.4)$$

نسجل أن $\vec{V}_{AB}=-\vec{V}_{BA}$ أي أن سِرعة A بالنسبة لـــ B مساوية و معاكسة لسرعة B بالنسبة لـــ A.

نحصل على التسارعين النسبيين للنقطتين الماديتين المتحركتين باشتقاق كل من عبارتي السرعتين النسبيتين بالنسبة للزمن:

$$\vec{a}_{AB}=\frac{d\vec{V}_{AB}}{dt}=\frac{d\vec{V}_A}{dt}-\frac{d\vec{V}_B}{dt}\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{AB}=\vec{a}_A-\vec{a}_B} \quad (54.4)$$

$$\vec{a}_{BA}=\frac{d\vec{V}_{BA}}{dt}=\frac{d\vec{V}_B}{dt}-\frac{d\vec{V}_A}{dt}\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{BA}=\vec{a}_B-\vec{a}_A} \quad (55.4)$$

نسجل هنا أيضا أن $\vec{a}_{AB}=-\vec{a}_{BA}$ أي أن تِسارع A بالنسبة لـــ B مساي و معاكس لتسارع B بالنسبة لـــ A.

مثال 11.4:

1/ تتحرك سيارتان A و B على رواقين لطريق سيّار مستقيم بسرعتي $110 km.h^{-1}$ و $90 km.h^{-1}$ على التوالي. حدد شعاع السرعة النسبية لـــ A بالنسبة لـــ B في الحالتين:

ا/ تسير السيارتان في نفس الاتجاه،

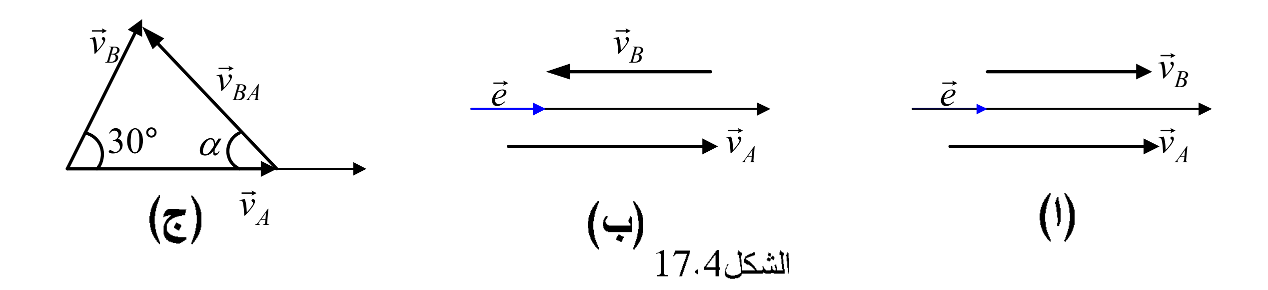
ب/ تسير السيارتان في اتجاهين متعاكسان.

2/ لو كانت السيارتان تسيران بنفس السرعتين السابقتين على طريقين متقاطعين و الزاوية بينهما $30°$، فما هي السرعة النسبية للسيارة B بالنسبة لسيارة A.

الحل:

1/ا/ سرعة السيارة A بالنسبة للسيارة B هي: $\vec{v}_{AB}=\vec{v}_A-\vec{v}_B$. باعتبار شعاع الواحدة $\vec{e}$ ؛ فإن السرعتين متوازيتان و لهما نفس الاتجاه (الشكل17.4–ا)، أي اتجاه $\vec{e}$ و بالتالي:

$$\vec{v}_{AB}=\vec{v}_A-\vec{v}_B=110\vec{e}-90\vec{e}\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB}=20\vec{e}\Rightarrow v_{AB}=20 km.h^{-1}}$$



الشكل17.4

ب/ الآن و بما أن السرعتين متوازيتان و لكنهما متعاكستا الاتجاه (الشكل17.4–ب–) فإن:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 110\vec{e} - (-90\vec{e}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{AB} = 200\vec{e} \Rightarrow v_{AB} = 200 km.h^{-1}}$$

2/ الطريقان متقاطعان و بينهما زاوية مقدارها $30°$ (الشكل17.4–ج–)

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow v_{BA} = \left(v_B^2 + v_A^2 - 2v_A v_B \cos 30°\right)^{1/2}$$

$$v_{AB} = \left(110^2 + 90^2 - 2.110.90.0,87\right)^{1/2} \quad , \quad \boxed{v_{AB} = 54,5 km.h^{-1}}$$

لتحديد منحى السرعة النسبية $\vec{v}_{AB}$ يكفي تعيين الزاوية α و ذلك بتطبيق قانون الجيوب:

$$\frac{v_{BA}}{\sin 30°} = \frac{v_B}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{v_B}{v_{BA}}\sin 30°} \quad \sin\alpha = \frac{90}{54,5}.0,5 \simeq 0,82 \Rightarrow \boxed{\alpha = 55,1°}$$

و هذا يعني أن الراكب في السيارة A يرى السيارة B تجري بسرعة $55,1 km.h^{-1}$ متجهة (حسب الشكل17.4–ج–) إلى اليسار بزاوية $55,1°$. بينما الراكب في السيارة B يرى السيارة A تجري بسرعة $55,1 km.h^{-1}$ و لكن متجهة إلى يمينه بزاوية $180 - (30° + 55,1°) = 94,9°$.

كانت هذه سرعة متحرك بالنسبة لمتحرك آخر و هما مرتبطان بنفس المعلم. فكيف يكون الحال لو كان الملاحظان منتميين لمعلمين مختلفين الواحد في حركة بالنسبة للآخر؟ هذا ما سنجيب عنه في ما يلي.

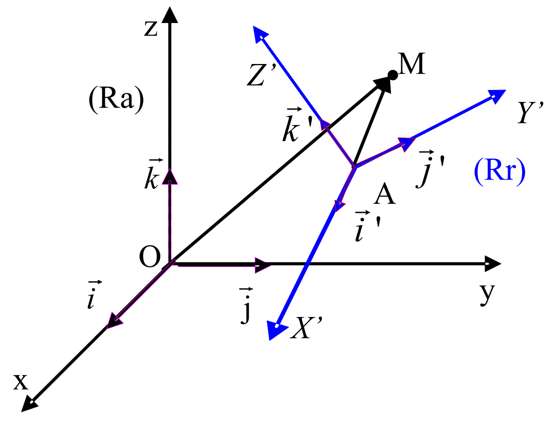
3/مصطلحات و رموز:

نعتبر المعلمين (Ra) و (Rr) و مراقبين كل واحد منهما مرتبط بأحد المعلمين. لننظر إلى الشكل 18.4.

Ra : المعلم المطلق (repère absolu) و نعتبره ساكنا.

R : المعلم النسبي(repère relatif) و نعتبره متحركا بالنسبة للمعلم المطلق.

M : نقطة مادية (point matériel) في حركة بالنسبة للمعلمين.



الشكل 18.4: المعلمان المطلق و النسبي

كل مراقب أو ملاحظ يسجل قياساته. نجمع هذه النتائج في الجدول التالي:

الملاحظ	في المعلم (Ra) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ثابتة في Ra	في المعلم (Rr) $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ متغيرة بالنسبة لـ(Ra)
الموضع	$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$	$\vec{r}\,'=\overrightarrow{AM}$
السرعة	$\vec{v}_a=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{v}_r=\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$
التسارع	$\vec{a}_a=\dfrac{d\vec{v}_a}{dt}$	$\vec{a}_r=\dfrac{d\vec{v}_r}{dt}$

❖ **ملاحظة هامة:** افترضنا في ما سبق أن $t=t'$ ، أي أن الملاحظين يستعملان نفس الزمن ، و هذا يعني أن الزمن لا يتعلق بحركة الملاحظ. يبدو هذا جد معقول ، غير أن التجربة يمكنها تفنيده. لا يمكن لهذا الافتراض أن يبقى مقبولا إلا في حالة السرعات الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء ، و هذا هو ما سوف نتخذه في تحليلنا الحالي.

❖ **العلاقة بين الموضعين:**

نلاحظ من الشكل 18.4 أن:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}} \qquad (56.4)$$

$$\underbrace{x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}}=\underbrace{(x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}+z_A.\vec{k})}_{\overrightarrow{OA}}+\underbrace{\left(x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,'\right)}_{\overrightarrow{AM}}$$

❖ **العلاقة بين السرعتين:**

باشتقاق العبارة (56.4) بالنسبة للزمن نحصل على العلاقة بين مختلف السرعات:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}+\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}\,'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a}=\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e}+\underbrace{\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}\,'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}} \qquad (57.4)$$

$\vec{v}_a$: السرعة المطلقة (vitesse absolue) أي سرعة M بالنسبة للمعلم (Ra).

$\vec{v}_e$: سرعة الجر (vitesse d'entraînement) أي سرعة المعلم المتحرك (Rr) بالنسبة للمعلم المطلق (Ra) ، يمكن اعتبارها كسرعة مطلقة $\vec{v}_a$ للمتحرك M في (Ra) إذا كانت إحداثيات M في (Rr) ثابتة أي إذا كان M ساكنا بالنسبة للمعلم (Rr):

$\vec{v}_r=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_e=\vec{v}_a$

$\vec{v}_r$: السرعة النسبية (vitesse relative) أي سرعة النقطة M بالنسبة للمعلم النسبي (Rr). يمكن اعتبارها كسرعة مطلقة $\vec{v}_a$ للمتحرك M في (Ra) إذا كان المعلم (Rr) ساكنا بالنسبة للمعلم (Ra): $\vec{v}_e=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_r=\vec{v}_a$

العلاقة بين السرعات الثلاثة و التي تسمى **قانون تركيب السرعات** هي:

$$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r} \qquad (58.4)$$

شعاع السرعة المطلقة يساوي المجموع الشعاعي لسرعة الجر و السرعة النسبية.

ملاحظة:

- إذا كان (Ra) و (Rr) ساكنين الواحد بالنسبة للآخر $(\vec{v}_e=\vec{0})$ فإن المراقبين يقيسان نفس السرعتين، و بالتالي نفس المسارين رغم أن شعاعي الموضع مختلفان $(\overrightarrow{OM}\neq\overrightarrow{OA})$.
- إذا كان (Rr) في حركة انسحابية (منتظمة أم لا) بالنسبة للمعلم (Ra) حيث $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ ثابتة، فإن $\vec{v}_e$ مستقلة عن M.

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_e=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

❖ **العلاقة بين التسارعات:**

نشتق العبارة (57.4) بالنسبة للزمن ثم نظمها لنتوصل إلى العلاقة بين مختلف التسارعات بالنسبة للمعلمين:

$$\vec{a}_a=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}_a}{dt}=\left[\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}+x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}\right]\rightarrow\vec{a}_e$$
$$+\left[\vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2}+\vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2}+\vec{k}\,'\frac{d^2z'}{dt^2}\right]\rightarrow\vec{a}_r \qquad (59.4)$$
$$+2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2}+\frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2}+\frac{dz'.d\vec{k}\,'}{dt^2}\right]\rightarrow\vec{a}_C$$

$\vec{a}_a$: التسارع المطلق (accélération absolue) و هو تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم (Ra).

$\vec{a}_r$: التسارع النسبي (accélération relative) و هو تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم (Rr).

$\vec{a}_e$: تسارع الجر (accélération d'entraînement) و هو تسارع المعلم (Rr) بالنسبة للمعلم (Ra).

$\vec{a}_C$: تسارع تكميلي مسمى **بتسارع كوريوليس** (accélération de Coriolis) نسبة إلى أول من وضعه سنة 1832 (Gaspard Coriolis 1792-1843).

ينعدم تسارع كوريوليس:

- إذا كان M ساكنا بالنسبة للمعلم (Rr): $\frac{dx'}{dt}=\frac{dy'}{dt}=\frac{dz'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_C=\vec{0}$
- إذا كان المعلم (Rr) في حركة انسحابية (حتى و لو متغيرة) بالنسبة للمعلم (Ra):

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}=\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}=\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\\ \frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_c=\vec{0}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e$$

مثال 12.4:

تسقط رقعات ثلج شاقوليا بسرعة $8ms^{-1}$. بأي سرعة تضرب هذه الرقعات الزجاج الأمامي لسيارة تسير بسرعة $50km.h^{-1}$؟

الحل:

$\vec{v}_e$: سرعة السيارة بالنسبة للأرض أي سرعة الجر

$\vec{v}_a$: سرعة الرقعات بالنسبة للأرض أي السرعة المطلقة

$\vec{v}$: سرعة الرقعات بالنسبة للسيارة أي السرعة النسبية

من الشكل 19.4 نرى أن:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e \quad ; \quad \vec{v}_r = \vec{v}_a + \left(-\vec{v}_e\right)$$

نحول وحدة سرعة السيارة فنجد: $50km.h^{-1} = 13,9ms^{-1}$

نمر الآن إلى التطبيق العددي:

$$\boxed{v_r = \left(v_a^2 + v_e^2\right)^{1/2}} \quad \boxed{v_r = 16ms^{-1}}$$

لتحديد منحى أي جهة شعاع السرعة النسبية نحسب ظل الزاوية α:

$$tg\alpha = \frac{v_e}{v_a} = 1,74 \Rightarrow \boxed{\alpha = 60,1°}$$

و هذا يعني أن رقعات الثلج تسقط بسرعة $16ms^{-1}$ تحت زاوية قدرها $\alpha = 60,1°$

الشكل 19.4

مثال 13.4:

أبحرت سفينة في الاتجاه شمال 60° غرب (N60°O) بسرعة 4km/h بالنسبة للماء. جهة التيار المائي البحري هي بحيث تكون الحركة الناتجة بالنسبة للأرض في اتجاه الغرب بسرعة 5km/h. أحسب سرعة و جهة التيار المائي بالنسبة للأرض.

الحل:

أول ما يجب أن نبدأ به هو رسم هندسي و الذي بدونه لا يمكن حل هذا التمرين.

يجب أن نفهم أن المطلوب هو حساب شدة سرعة الجر و تحديد حاملها.

$\vec{v}_a$: السرعة المطلقة أي سرعة السفينة بالنسبة للأرض،

$\vec{v}_e$: سرعة الجر أي سرعة التيار المائي بالنسبة للأرض،

$\vec{v}$: السرعة النسبية أي سرعة السفينة بالنسبة للتيار المائي.

الشكل 20.4

بعد رسم بالشكل المقابل نتوصل إلى المعادلات التالية:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\boxed{v_e = \left[v_a{}^2 + v_r{}^2 - 2v_a.v_r.\cos 30°\right]^{1/2}}$$

التطبيق العددي يعطينا: $\boxed{v_e = 2,52km.h^{-1}}$

لتحديد الحامل لا بد من حساب الزاوية α و ذلك باستعمال قانون الجيوب:

$$\frac{v_r}{\sin\alpha} = \frac{v_e}{\sin 30°} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{v_r}{v_e}.\sin\alpha} \quad ; \quad \sin\alpha = 0,4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 23,6°}$$

هذا يعني أن حامل شعاع سرعة ماء البحر بالنسبة للأرض يصنع الزاوي 23,6° مع

المحور غرب− شرق نحو الجنوب أي $O23.6°S$.

4/ حالة الحركة الدورانية:

❖ العلاقة بين السرعات:

يمكن وضع السرعة الزاوية على شكل **مقدار شعاعي** بحيث تكون جهته عمودية على مستوى الحركة في اتجاه يحدد باستعمال قاعدة اليد اليمنى لتحديد جهة الشعاع الناتج عن الجداء الشعاعي أو اتجاه تقدم برغي يدور في اتجاه حركة دوران الجسم.

نلاحظ على الشكل21.4 أن :

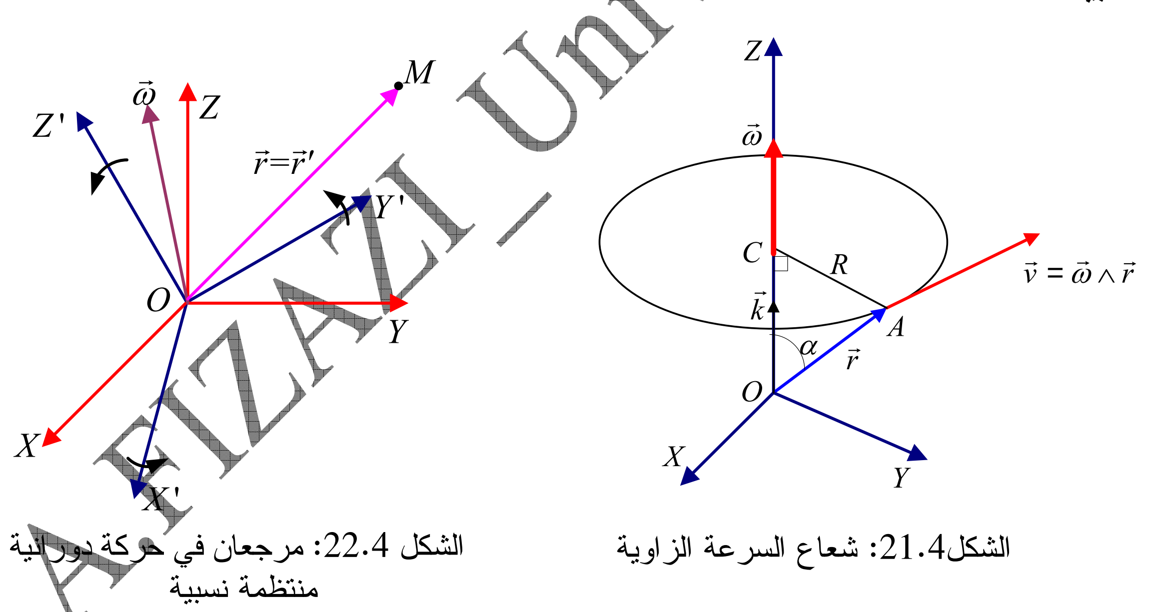
$R = r.\sin\alpha$ و نعرف أن $v = \omega.R$ و منه فإن $v = \omega R\sin\alpha$

يمكن إذن كتابة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} \Leftrightarrow v = \omega.r.\sin\alpha \qquad (60.4)$$

و لذا يصح أن نكتب كما نلاحظ: $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}.\vec{k}$

في الشكل (22.4) نفترض ملاحظين: الملاحظ O المرتبط بالمعلم R و الملاحظ O' المرتبط بالمعلم R' و هما في حركة دورا نية الواحد بالنسبة للآخر بدون حركة انسحابية.



الشكل 22.4: مرجعان في حركة دورانية منتظمة نسبية

الشكل21.4: شعاع السرعة الزاوية

كل ملاحظ يرى معلم الملاحظ الآخر يدور بسرعة زاوية ω.

بالنسبة للملاحظ O المرتبط بالمعلم $OXYZ$ فإن سرعة النقطة المادية M تشتق من عبارة شعاع الموضع:

$$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_a = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \qquad (61.4)$$

بالنسبة للملاحظ O' المرتبط بالمعلم $OX'Y'Z'$ (لاحظ أن للمعلمين نفس المبدإ، أي O' منطبقة مع O) فإن سرعة نفس النقطة M تشتق من عبارة شعاع الموضع:

$$\boxed{\vec{r}\,'=\vec{r}=x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,'\Rightarrow\vec{v}_r=\frac{dx'}{dt}.\vec{i}\,'+\frac{dy'}{dt}.\vec{j}\,'+\frac{dz'}{dt}.\vec{k}\,'}\qquad(62.4)$$

بالنسبة للملاحظ O، المعلم $OX'Y'Z'$ يدور و بالتالي فإن أشعة الوحدة $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ متغيرة الجهة (الحامل). و عليه فإنه يكتب بالنسبة للمعلم R':

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx'}{dt}.\vec{i}\,'+\frac{dy'}{dt}.\vec{j}\,'+\frac{dz'}{dt}.\vec{k}\,'+x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}\qquad(63.4)$$

من جهة أخرى فإن نهايات الأشعة $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ تدور بحركة دائرية منتظمة بالنسبة للملاحظ O بسرعة زاوية ω. و بعبارة أخرى فإن $\frac{d\vec{i}\,'}{dt}$ تمثل سرعة نقطة تقع على بعد يساوي الواحدة من O و ينتقل بحركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ω.

بمثل ما هو في المعادلة (60.4) يصبح لدينا:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{i}\,'\quad;\quad\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{j}\,'\quad;\quad\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{k}\,'$$

من المعادلة (63.4) يمكن كتابة :

$$x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge x'.\vec{i}\,'+\vec{\omega}\wedge y'.\vec{j}\,'+\vec{\omega}\wedge z'.\vec{k}\,'$$

$$x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge(x'.\vec{i}\,'+y'.\vec{j}\,'+z'.\vec{k}\,')$$

$$\boxed{x'.\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+y'.\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+z'.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}}\qquad(64.4)$$

بالتعويض في المعادلة (63.4) نحصل على:

$$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{r}}\qquad(65.4)$$

هذه العبارة تعطي العلاقة بين السرعتين للنقطة A ، مقاستين من قبل الملاحظين و هما في حركة نسبية دورانية.

☜ **سرعة الدوران اللحظية:**

رأينا أن $\vec{\omega}=\omega.\vec{k}$. إذا كانت $\vec{\omega}$ تابع للزمن فإن $\vec{\omega}(t)=\omega(t).\vec{k}$ تمثل سرعة الدوران اللحظية. للتمييز بين السرعة الزاوية الثابتة في الحركة الدائرية المنتظمة و سرعة الدوران اللحظية فإننا نرمز لهذه الأخيرة بــ $\vec{\Omega}(t)$.

❖ **العلاقة بين التسارعات:**

للحصول على العلاقة بين مختلف التسارعات نتبّع نفس المنهجية.

تسارع المتحرك M التي يقيسه المراقب O بالنسبة للمعلم $OXYZ$ هو:

$$\vec{a}_a=\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}=\vec{i}.\frac{dv_x}{dt}+\vec{j}.\frac{dv_y}{dt}+\vec{k}.\frac{dv_z}{dt}$$

تسارع المتحرك M التي يقيسه المراقب O' بالنسبة للمعلم $OX'Y'Z'$، دون أخذ بعين الاعتبار الدوران، هو:

$$\vec{a}_r=\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt}+\vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt}+\vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}$$

باشتقاق العبارة (65.4)، مع التذكير أن $\vec{\omega}$ مفترضة ثابتة، نحصل على:

$$\boxed{\vec{a}_a=\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}=\frac{d\vec{v}_r}{dt}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad (66.4)$$

و بما أن: $\vec{v}_r=\vec{v}'=\vec{i}'.v_x'+\vec{j}'.v_y'+\vec{k}'.v_z'$

فإن: $\dfrac{d\vec{v}_r}{dt}=\vec{i}'.\dfrac{dv_x'}{dt}+\vec{j}'.\dfrac{dv_y'}{dt}+\vec{k}'.\dfrac{dv_z'}{dt}+v_x'\dfrac{d\vec{i}'}{dt}+v_y'\dfrac{d\vec{j}'}{dt}+v_z'\dfrac{d\vec{k}'}{dt}$

بمثل ما حصلنا على المعادلة (64.4) فإننا نحصل على:

$$\vec{i}'.\frac{dv_x'}{dt}+\vec{j}'.\frac{dv_y'}{dt}+\vec{k}'.\frac{dv_z'}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

و لدينا كذلك:

$$v_x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+v_y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+v_z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=\vec{a}$$

و منه فإن:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_r}{dt}=\vec{a}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{v}'} \qquad (67.4)$$

كما لدينا أيضا:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\overrightarrow{v_a}=\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{v} \qquad (68.4)$$

بحيث:

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v}_a=\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)$$

$$\boxed{\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)} \qquad (69.4)$$

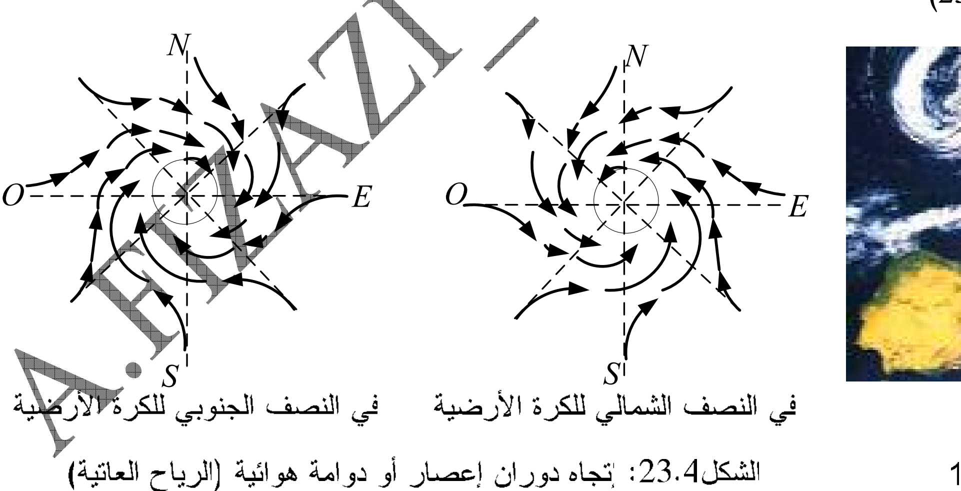
باستبدال النتيجتين (67.4) و (68.4) في المعادلة (69.4) نحصل في نهاية المطاف على المعادلة (70.4) التي تعطي العلاقة بين مختلف التسارعات للمتحرك M المقاسة من طرف الملاحظين O و O'، و هما في حركة نسبية دورانية منتظمة.

$$\vec{a}_a=\frac{d\vec{v}_r}{dt}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow\boxed{\vec{a}_a=\vec{a}_r+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)} \qquad (70.4)$$

الحد $2\vec{\omega}\wedge\vec{v}$ يسمى **تسارع كوريوليس**، و الحد $\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\right)$ يمثل تسارعا مركزيا.

كل من التسارعين (كوريوليس و المركزي) ناجمين عن الحركة النسبية **لدوران** الملاحظين.

يتجلى التسارعان في حركة الرياح الدوارة و الأعاصير (الصورة1.4)، و حتى في الماء المبتلع في حوض غسيل مثلا، إذ تظهر الحركة الدوارنية و يختلف اتجاهها حسب المنطقة من الكرة الأرضية التي تجري فيها الحادثة. في النصف الشمالي يكون الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة و في النصف الجنوبي يكون الدوران في اتجه عقارب الساعة.(الشكل 23.4)



في النصف الجنوبي للكرة الأرضية   في النصف الشمالي للكرة الأرضية

الشكل23.4: إتجاه دوران إعصار أو دوامة هوائية (الرياح العاتية)   الصورة 1.4

نختتم هذا الفصل بالإشارة إلى تسارع الجرّ في حالة حركة **<u>دورانية غير منتظمة</u>**.

بالرجوع إلى العبارة (59.4) فإن تسارع الجرّ هو:

$$\vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}+x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

بوضع $\overrightarrow{OA}=\vec{r}\,'$ يمكن كتابة:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left[\underbrace{x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt^2}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}\right] = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r} + \underbrace{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}\wedge\vec{\omega}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\,' + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'\right) \qquad (71.4)$$

نلاحظ أن لتسارع الجرّ ثلاثة حدود حيث:

$\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}$: تسارع الحركة الانسحابية للمبدإ A للمرجع (Rr)بالنسبة للمرجع المطلق (Ra)،

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}\,'$: التسارع الناتج عن عدم انتظام دوران (Rr) بالنسبة للمرجع (Ra)، أي الناتج عن التسارع الزاوي للمرجع (Rr)،

$\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$:التسارع المركزي الموجه نحو محور الدوران.

و الخلاصة هي أنه بإدخال شعاع الدوران $\vec{\omega}$ يأخذ قانوني تركيب السرعات و التسارعات في الحالة العامة على التوالي العبارتين:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)}_{\vec{v}_e} \qquad (72.4)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

$$\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}_{\vec{a}_a} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{AM}}{dt^2}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{2.\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}_{\vec{a}_c} + \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{AM} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right)}_{\vec{a}_e} \qquad (73.4)$$

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 4.28 En roulant sous la pluie à $100 km.h^{-1}$ sur une route plane, un conducteur remarque que les gouttes de pluie ont, vues à travers les vitres latérales de sa voiture, des trajectoires qui font un angle de $80°$ avec la verticale. Ayant arrêté sa voiture, il remarque que la pluie tombe en fait verticalement. Calculer la vitesse de la pluie par rapport à la voiture immobile et par rapport à la voiture se déplaçant à $100 km.h^{-1}$	**تمرين 28.4** و هو يسير بـــ $100 km.h^{-1}$ على طريق مستو ، لاحظ السائق أن لقطرات المطر، حسب ما يراه عبر الزجاج العرضي لسيارته، مسارات تصنع الزاوية $80°$ مع الشاقول. لما أوقف سيارته رأى أن المطر يسقط شاقوليا. أحسب سرعة المطر بالنسبة للسيارة متوقفة و بالنسبة للسارة و هي تسير بـــ $100 km.h^{-1}$.

Exercice 4.29 On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération g . 1/ Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ? 2/ Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e$? (représenter dans chaque cas la trajectoire demandée).	**تمرين 29.4** من أعلى بناية ارتفاعها h نترك كرية تسقط بدون سرعة ابتدائية. سقوطها يجري وفق الشاقول بحركة متسارعة بانتظام بتسارع g . 1/ ما هو مسار الكرية في مرجع مرتبط بسيارة تسير بحركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\vec{v}$ و تمرّ بشاقول السقوط لحظة ترك الكرية؟ 2/ ما هو مسار الكرية في نفس المرجع المذكور إذا افترضنا أن السيارة، لحظة ترك الكرية تسقط، تنطلق بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام بتسارع $\vec{a}_e$ ؟ (مثل في كل حالة المسار المطلوب).

Exercice 4.30 On considère dans le repère fixe OXY le système de deus axes Oxy mobiles tel que l'axe Ox forme l'angle θ avec l'axe OX . Un point matériel M se déplace sur l'axe Ox , sa position est définie par $r = OM$. Calculer : 1/ la vitesse et l'accélération relatives du point, 2/ la vitesse et l'accélération d'entraînement, 3/ l'accélération coriolis. 4/ En déduire la vitesse et l'accélération du point M dans les coordonnées polaires.	**تمرين 30.4** نعتبر في المستوي الثابت OXY جملة محورين Oxy متحركين حيث يشكل المحور Ox زاوية θ مع المحور OX . تتحرك نقطة مادية M على المحور Ox و هي معرّفة بـــ $r = OM$.أحسب: 1/ السرعة و التسارع النسبيين للنقطة M ، 2/ سرعة و تسارع الجرّ، 3/ تسارع كوريوليس، 4/ إستنتج السرعة و التسارع المطلقين لـــ M بالإحداثيات القطبية.

Exercice 4.31 Dans le plan XOY , une droite OX' tourne autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante. Un mobile $M(OM = r)$ se déplace sur la droite OX' d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération a . A l'instant initial M se trouve en M_0 , au repos, puis s'éloigne de O . 1/Déterminer les expressions littérales vectorielles	**تمرين 31.4** في المستوى XOY ، يدور مستقيم OX' حول المحور OZ بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \dot{\theta}$. ينتقل متحرك $M(OM = r)$ على المستقيم OX' بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام بتسارع a . في اللحظة الابتدائية M يوجد في M_0 ، في حالة سكون، ثم يبتعد عن O . 1/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية للسرعات النسبية،

des vitesses relative, d'entraînement et absolue de M .
Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur vitesse absolue du point M .
2/ Si l'axe OX' est confondu avec l'axe OX à l'instant initial, calculer les coordonnées du point M à la date $t = 3s$. Dessiner les trois vecteurs vitesses à cette date.
3/ Déterminer les expressions littérales vectorielles dans une base polaire des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis de M .
Déterminer les expressions littérales donnant la norme et la direction du vecteur accélération absolue du point M .
Dessiner ces vecteurs accélérations à t =3s.
Données: $OM_0 = 1cm$; $a = 2cm.s^{-2}$;

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1}.$$

الجر و المطلقة لــ M .
عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع السرعة المطلقة للنقطة M .
2/ إذا كان المحور OX' منطبق على المحور OX في اللحظة الإبتدائية، أحسب إحداثيات النقطة M في اللحظة $t = 3s$.
أرسم أشعة السرعة الثلاثة في هذه اللحظة M .
3/ عيّن العبارات الحرفية الشعاعية في قاعدة للإحداثيات القطبية للتسارعات النسبية، الجر و كوريوليس لــ M .
عيّن العبارات الحرفية التي تعطي معيار(الشدة) و جهة شعاع التسارع المطلق للنقطة M .
أرسم أشعة التسارعات هذه في M .
المعطيات: $OM_0 = 1cm$ ، $a = 2cm.s^{-2}$ ،

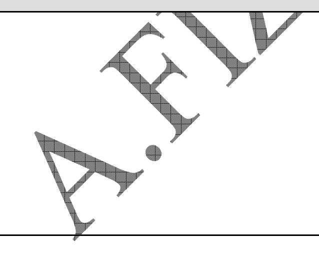
$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{5} rad.s^{-1}$$

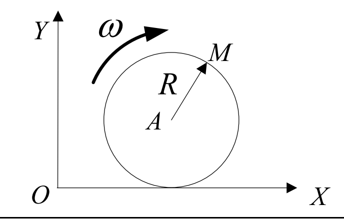
Exercice 4.32

Un disque circulaire de centre A et de rayon R roule sans glisser sur l'axe OX avec une vitesse angulaire ω constante. Au départ $t = 0$, un point M de la circonférence coïncide avec l'origine O .
1/ Quelles sont les coordonnées du point M au temps t en fonction de ω, R et t ? En déduire la nature de la trajectoire.
2/ Calculer la vitesse absolue et la vitesse relative en précisant leurs directions par rapport à l'axe OX .
3/ A partir des expression des vecteurs de la vitesse absolue et la vitesse relative, vérifier la norme et la direction du vecteur vitesse d'entraînement.

تمرين 32.4

في المستوي XOY يتدحرج (يدور بدون انزلاق) قرص دائري نصف قطره R و مركزه A على المحور OX بسرعة زاوية ثابتة ω . في البداية $t = 0$ ، تنطبق نقطة M من محيط القرص مع المبدإ O .
1/ ما هي إحداثيتي النقطة M في اللحظة t بدلالة ω, R و t ؟ إستنتج طبيعة المسار؟
2/ أحسب السرعة المطلقة و السرعة النسبية و وضح جهتيهما بالنسبة للمحور OX .
3/ انطلاقا من عبارتي شعاعي السرعة المطلقة و النسبية تأكد من طويلة و جهة سرعة الجر.





Exercice 4.33

Dans le plan XOY , une droite tourne autour de OZ avec une vitesse constante $\omega = \dot{\theta}$.
Un point mobile $M\left(OM = r\right)$ se déplace sur la droite OX' suivant la loi :

$$r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \text{ avec } r_0 = cte.$$

1/ Déterminer à l'instant t en fonction de ${}_0$ et ω , la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par

تمرين 33.4

في مستوي XOY ، يدور مستقيم حول OZ بسرعة ثابتة $\omega = \dot{\theta}$.
تنتقل نقطة $M\left(OM = r\right)$ متحركة على المستقيم OX' وفق القانون:

$$r_0 = cte \text{ مع } r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

1/ حدّد في اللحظة t بدلالة ${}_0$ و ω ، السرعة النسبية

leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celui-ci est constant.

2/ déterminer à l'instant t en fonction de ${}_0$ et ω, l'accélération relative l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile $X'O'Y'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

و سرعة الجر لــ M بمسقطيهما في المعلم المتحرك $X'O'Y'$. إستنتج السرعة المطلقة المعبر عنها في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذه ثابتة.

2/ حدد في اللحظة t بدلالة ${}_0$ و ω، التسارع النسبي تسارع الجر و التسارع التكميلي لــ M بإسقاطاتها في المعلم المتحرك $X'O'Y'$. إستنتج التسارع المطلق المعبر عنه في نفس قاعدة الإسقاط، و بين أن شدة هذا ثابتة.

Exercice 4.34

Une mouche M se déplace sur l'aiguille des secondes d'une montre accrochée à un mur vertical avec un mouvement uniforme de vitesse v. La mouche part du point O à l'instant $t=0$ pour atteindre l'extrémité de l'aiguille de longueur $20cm$ une minute plus tard.

1/ Ecrire les expressions de la vitesse $\vec{v}_M$ et de l'accélération $\vec{a}_M$ de M dans la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée à la mouche.

2/ Calculer les coordonnées θ_M, x_M, y_M de la mouche aux instants $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. Dessiner la trajectoire sur le mur.

3/ Représenter sur la trajectoire le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ au temps $t=45s$ et le vecteur accélération $\vec{a}_M$ au temps $t=60s$.

تمرين 34.4

تنتقل ذبابة M على رقاص الثواني لساعة مثبتة على جدار عمودي بحركة منتظمة سرعتها v. تنطلق الذبابة من النقطة O في اللحظة $t=0$ لتصل بعد دقيقة واحدة إلى نهاية الرقاص الذي طوله $20cm$.

1/ أكتب عبارتي السرعة $\vec{v}_M$ و التسارع $\vec{a}_M$ لــ M في القاعدة المتحركة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ المرتبطة بالذبابة.

2/ أحسب الإحداثيات θ_M, x_M, y_M للذبابة في اللحظات $0s, 15s, 30s, 45s, 60s$. أرسم المسار على الجدار.

3/ مثل على المسار شعاع السرعة $\vec{v}_M$ في اللحظة $t=45s$ و شعاع التسارع $\vec{a}_M$ في اللحظة $t=60s$.

Exercice 4.35

Dans le plan OXY, un cercle de rayon R, de diamètre OA, tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O. On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires $O'X'Y'$ (l'axe $O'X'$ est dirigé suivant OA).

A l'instant $t=0$, A est sur OX, OX et OX' étant colinéaires.

Un point M, initialement en A, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω.

1/ Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère OXY (en dérivant les composantes de $\overrightarrow{OM}$).

2/ Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère $O'X'Y'$ puis dans OXY.

3/ a/ Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère OXY par la loi de composition des vitesses.

b/ Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère OXY ; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

تمرين 35.4

في المستوي OXY، يدور قرص نصف قطره R وقطره OA بسرعة زاوية ثابتة ω حول النقطة O. نشرك لمركزه المتحرك O' محورين مستطيلين $O'X'Y'$ (المحور $O'X'$ موجه وفق OA).

في اللحظة $t=0$، A يقع على OX، OX و OX' متوافقان خطيا.

نقطة M، كانت في البداية في A ، تنتقل على المحيط في الاتجاه الموجب بنفس السرعة الزاوية ω.

1/ أحسب مباشرة مركبتي شعاعي سرعة و تسارع M في المعلم OXY (نشتق مركبات $\overrightarrow{OM}$).

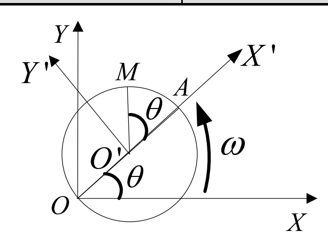
2/ أحسب مركبات السرعة والتسارع النسبيين لــ M في المعلم $O'X'Y'$ ثم في OXY.

3/ ا/ أحسب مركبات سرعة الجر في المعلم OXY باستعمال قانون تركيب السرعات.

ب/ أحسب بالمثل مركبات تسارع الجر في المعلم OXY؛ إستنتج التسارع التكميلي(كوريوليس).

4/ تأكد من مركبات سرعة الجر و تسارع الجر التكميلي باستعمال العبارات التي تقحم شعاع الدوران $\vec{\omega}$.

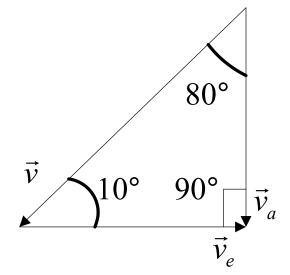
4/ vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$.	



Corrigés des exercices de 4.28 à 4.35 — حلول التمارين من 4.28 إلى 4.35

التمرين 4.28:

لتكن $\vec{v}_a$ سرعة المطر بالنسبة للأرض، $\vec{v}$ سرعة المطر بالنسبة للسيارة المتحركة و $\vec{v}_e$ سرعة السيارة بالنسبة للأرض.



نمثل الأشعة الثلاثة ثم نطبق نظرية الجيوب:

سرعة المطر بالنسبة للسيارة متوقفة:

$$\frac{v_a}{\sin 10°}=\frac{v_r}{\sin 90°}\Rightarrow \boxed{v_a=\frac{\sin 10°}{\sin 90°}v_r}\ ;\ \boxed{v_a\simeq 17,4km.h^{-1}}$$

سرعة المطر بالنسبة للسيارة المتحركة:

$$\frac{v_r}{\sin 90°}=\frac{v_e}{\sin 80°}\Rightarrow \boxed{v_r=\frac{\sin 90°}{\sin 80°}v_e}\ ;\ \boxed{v_r\simeq 117km.h^{-1}}$$

التمرين 4.29:

1/ المعادلة الزمنية لسقوط الكرية بالنسبة للمعلم الساكن هي: $z=-\frac{1}{2}gt^2+h\rightarrow(1)$

المسافة التي قطعتها السيارة بسرعة ثابتة خلال المدة t هي: $x'=vt\rightarrow(2)$

z' هو علو الكرية في المعلم المتحرك المرتبط بالسيارة و هو نفس الارتفاع في المعلم الساكن أي z.

بحذف الزمن ما بين المعادلتين (1) و (2) نحصل على مسار الكرية بالنسبة للمعلم المتحرك:

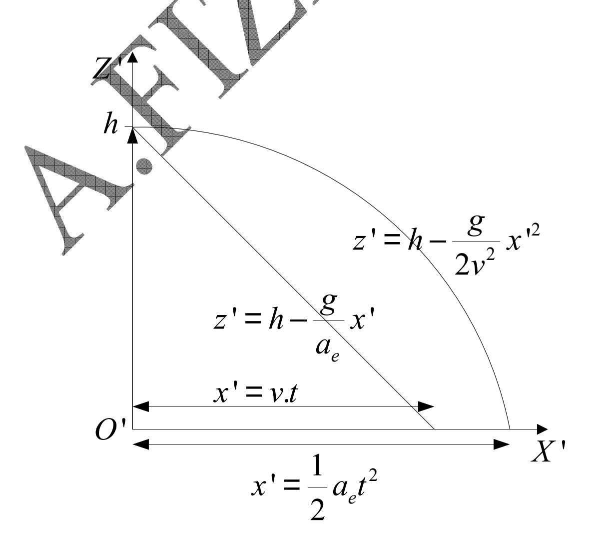
$t=\frac{x'}{v}\Rightarrow \boxed{z=z'=-\frac{g}{2v^2}x'^2+h}$:المسار **قطع مكافئ**.

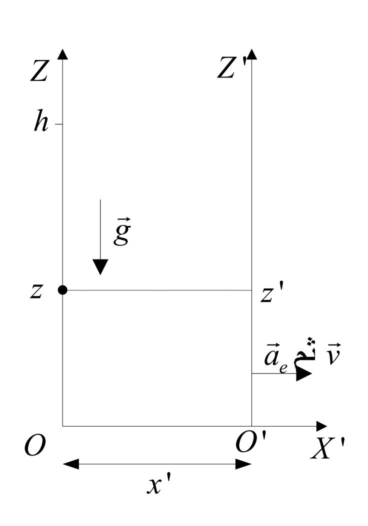
2/ المسافة التي قطعتها السيارة بحركة متسارعة بانتظام خلال المدة t هي: $x'=\frac{1}{2}a_et^2\rightarrow(3)$

بحذف الزمن ما بين المعادلتين (1) و (3) نحصل على مسار الكرية بالنسبة للمعلم المتحرك:

$t^2=\frac{2x'}{a_e}\Rightarrow \boxed{z=z'=-\frac{g}{a_e}x'+h}$:المسار **مستقيم**.

مثلنا في الشكل الموالي شكل المسار في كل حالة.





التمرين 4.30

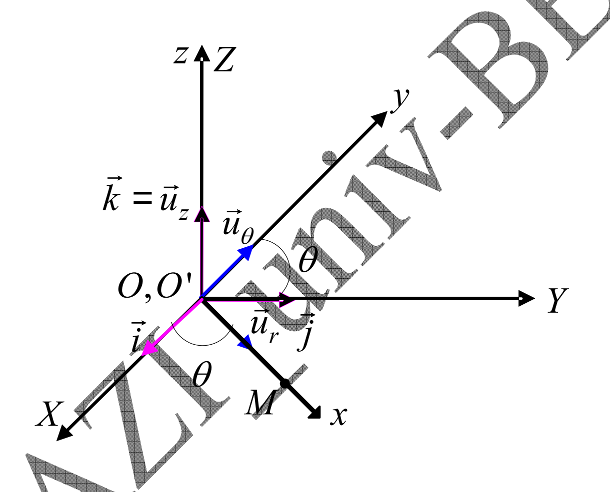
ندرس حركة M في القاعدة المتحركة $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. بالنسبة لــ M. أشعة الواحدة $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ مستقلة عن الزمن . (الشكل)

1/ شعاع الموضع: $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}\,' = r.\vec{u}_r}$ ، السرعة النسبية $\boxed{\vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r}$ و التسارع النسبي $\boxed{\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r}$

2/ سرعة الجرّ أي سرعة المحورين Oxy المتحركين بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هي:

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$
$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0 \quad (O \equiv O')$$
$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}.\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$



تسارع الجرّ أي تسارع المحورين Oxy المتحركين بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هو:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

3/ تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4/ السرعة المطلقة أي سرعة M بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هي:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$

التسارع المطلق أي تسارع M بالنسبة للمستوى الساكن أو الثابت OXY هو:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right).\vec{u}_\theta}$$

❖ **ملاحظة:** إذا أردنا القيام بالحسابات بالنسبة للمعلم المتحرك نستعمل القاعدة $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، فنعوض $\vec{u}$ و $\vec{u}_\theta$ في نتائج السرعات و التسارعات التي توصلنا إليها بـــ: $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$ و $\vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta$

التمرين 4.31:

1/ عبارة شعاع الموضع بالنسبة للمعلم المتحرك $OX'Y'$:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OM} = \vec{r} = r.\vec{i}' \\ \vec{i}' = \vec{u}_r \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right).\vec{u}_r}$$

نشتق شعاع الموضع في القادة المتحركة فنحصل على شعاع السرعة النسبية: $\boxed{\vec{v}_r = \dot{\vec{r}} = at.\vec{u}_r}$

عبارة شعاع سرعة الجر:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_e = \dfrac{d\overline{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overline{O'M} \\ \dfrac{d\overline{OO'}}{dt} = 0 \quad (O \equiv O') \\ \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega.\vec{u}_z \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\overline{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{1}{2}at^2 + r_0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

عبارة شعاع السرعة المطلقة: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = at.\vec{u}_r + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$

طويلته: $\boxed{v_a = \sqrt{(at)^2 + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)^2.\omega^2}}$

جهة أو حامل السرعة المطلقة(أنظر الشكل في الأسفل)

$$tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{\left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}{at}$$

2/ إحداثيات المتحرك في اللحظة $t = 3s$:

$\theta = \omega t$, $\boxed{\theta = 1,884 rad = 108°}$; $r = \frac{1}{2}at^2 + r_0$, $\boxed{r = 0,1m}$

$x = r.\cos\theta$, $\boxed{x = -0,031m}$; $y = r.\sin\theta$, $\boxed{y = 0,095m}$

$v_r = at$, $\boxed{v_r = 0,06 m.s^{-1}}$; $v_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega$, $\boxed{v_e = 0,0628 m.s^{-1}}$

3/نشتق شعاع السرعة النسبية فنحصل على شعاع التسارع النسبي:

$$\vec{a}_r = a.\vec{i}' = a.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = a.\vec{u}_r}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} \ , \ \boxed{v_a = 0,087 m.s^{-1}}$$

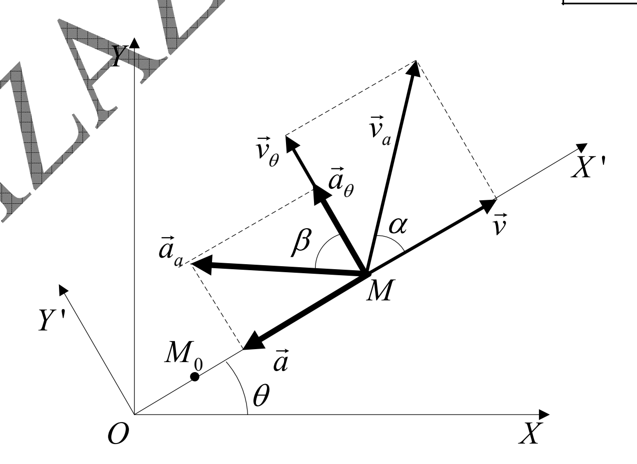
$$tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = 1,047 \Rightarrow \boxed{\alpha = 46,3°}$$

تسارع الجرّ :

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{0} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge\left(\underbrace{\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e}\right)$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \omega.\vec{u}_z\wedge\left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta = -r\omega^2\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -\left(\underbrace{\frac{1}{2}at^2 + r_0}_{\vec{r}}\right)\omega^2.\vec{u}_\theta}$$



3/ تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ at & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2at\omega.\vec{u}_\theta}$$

العبارة الحرفية للتسارع المطلق :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0 \right)\omega^2 \right].\vec{u}_r + \left(2at.\omega\right).\vec{u}_\theta}$$

طويلة التسارع المطلق:

$$\boxed{a_a = \sqrt{\left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0 \right)\omega^2 \right]^2 + \left(2at.\omega\right)^2}}$$

جهة (أو حامل) التسارع المطلق نستنتجه من الرسم السابق:

$$\boxed{tg\beta = \frac{a_\theta}{a_r} = \frac{2at}{a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0 \right)\omega}}$$

التمرين 4.32:

1/ إحداثيتا النقطة M : من الشكل (ا) نلاحظ أن: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

الفاصلة: خلال المدة t تمسح النقطة M الزاوية $-\omega t$، و موضعها محدّد بالزاوية $\theta = -\frac{\pi}{2} - \omega t$، في الوقت الذي يقطع مركز الدائرة المسافة $\overline{OA'} = vt$. و عليه: $x = \overline{OA'} + x'_M$.

$$\left.\begin{aligned} &\overline{OA'} = v.t = R\omega t \\ &x'_M = R.\cos\theta \\ &\cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \\ &\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -\sin\omega.t \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{x = R\left(\omega.t - .\sin\omega.t\right)}$$

الترتيب(من الشكل(ا): $y = R + y'_M$

$$\left.\begin{aligned} &y = R + R.\sin\theta \\ &\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega.t\right) = -\cos\omega.t \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{y = R\left(1 - .\cos\omega t\right)}$$

المسار هو المنحنى الذي ترسمه نهاية شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ مع مرور الزمن و هو معرف بمعادلاته الوسيطية:

$$\overline{OM}\begin{cases} x = R\left(\omega t - \sin\omega t\right) \\ y = R\left(1 - \cos\omega t\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

التمثيل البياني لهذه المعادلات الوسيطية يعطينا **منحنى دويري**(cycloïde).

2/ السرعة المطلقة للنقطة M :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_a \begin{cases} \dot{x} = v_x = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right) \\ \dot{y} = v_y = R\omega\sin\omega t \\ \dot{z} = v_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\left(1-\cos\omega t\right).\vec{i} + R\omega\sin\omega t.\vec{j}}$$

طويلة شعاع السرعة المطلقة:

$$v_a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ ;\ v_a = \sqrt{\left[R\omega\left(1-\cos\omega t\right)\right]^2 + \left[R\omega\sin\omega t\right]^2}$$

$$v_a = \sqrt{2R^2\omega^2\left(1-\cos\omega t\right)}$$

$$v_a = R\omega\sqrt{2\left(\underbrace{1-\cos\omega t}_{2.\sin^2\frac{\omega t}{2}}\right)} = R\omega\sqrt{2.2\left(\sin^2\frac{\omega t}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{v_a = 2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|}$$

لتحديد جهة شعاع السرعة المطلقة يكفي تعيين الزاوية α المحصورة بين المحور OX، أي شعاع الواحدة $\vec{i}$ ، و الشعاع $\vec{v}_a$ (أنظر الشكل-ب-). لهذا الغرض نستعمل خصائص الجداء السلمي:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_a.\vec{i} = v_a.i.\cos\alpha = \dot{x}\\ \dot{x} = v_a.\cos\alpha\\ \dot{x} = 2R\omega\left(1-\cos\omega t\right)\end{array}\right| \Rightarrow v_a.\cos\alpha = 2R\omega\left(1-\cos\omega t\right)$$

بالتعويض نحصل على:

$$2R\omega.\sin\frac{\omega t}{2}.\cos\alpha = R\omega\left(1-\cos\omega t\right)$$

و بمواصلة الحسابات نحصل على قيمة α:

$$\left.\begin{array}{l}2R.\sin\frac{\omega t}{2}.\cos\alpha = 2R.\sin^2\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\frac{\omega t}{2}\\ \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\\ \cos\alpha = \cos\left(-\alpha\right)\end{array}\right| \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\omega t}{2}\ \ ,\ \ \boxed{\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}\right|}$$

السرعة النسبية هي سرعة النقطة M بالنسبة للمرجع المتحرك $X'AY'$ و عليه: $\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$

نبدأ بإحداثيتي النقطة M في المعلم $X'AY'$:

$$x'_M = R.\cos\theta = R.\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\sin\omega t$$

$$y'_M = R\sin\theta = R.\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\cos\omega t$$

نشتق الإحداثيتين بالنسبة للزمن فنحصل على مركبتي السرعة النسبية:

$$\boxed{\dot{x}'_M = -R.\omega s\cos t}\quad ;\quad \boxed{\dot{y}'_M = -R.\omega.\sin\omega t}$$

أما شعاع السرعة النسبية فيكتب: $\boxed{\vec{v}_r = -R.\omega s\cos t.\vec{i} - -R.\omega.\sin\omega t.\vec{j}}$

و طويلته: $\vec{v}_r = \sqrt{(R.\omega s\cos t)^2 + (R.\omega.\sin\omega t)^2} \Rightarrow \boxed{v_r = R\omega}$

جهة شعاع السرعة النسبية: نتبع نفس الطريقة السابقة التي حدّدنا بواسطتها جهة شعاع السرعة المطلقة.

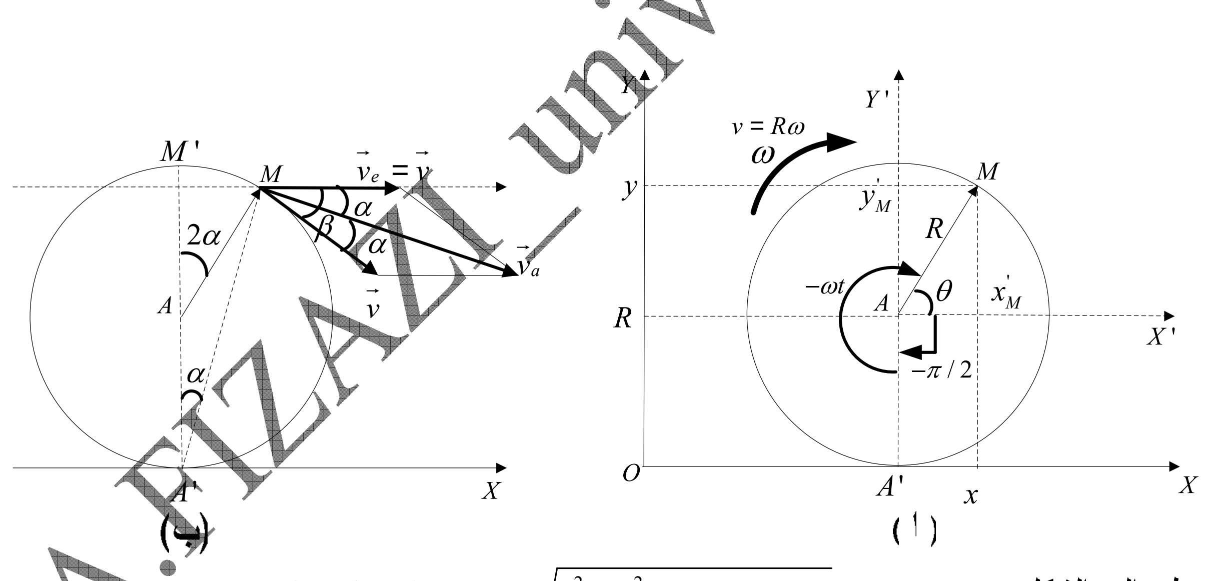
ننظر إلى الشكل –ب: الزاوية بين $\vec{v}$ و $\vec{i}$ هي المطلوبة.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r.\vec{i} = v_r.i.\cos\beta \\ v_r.\cos\beta = \dot{x}'_M = -\underbrace{R\omega}_{v_r}\cos\omega t \\ -\cos\omega t = \cos(\pi-\omega t) \end{array}\right| \Rightarrow \cos\beta = -\cos\omega t \quad ; \quad \boxed{\beta = \pi - \omega t = 2\alpha}$$

3/ سرعة الجر $\vec{v}_e$:

ننظر إلى الشكل – ب –

و نعتمد على بعض الخصائص الهندسية . بالنسبة للدائرة الزاوية في المركز تساوي ضعف الزاوية الواقعة على المحيط و التي تحصر نفس القوس من الدائرة $\left(2.\widehat{M'A'M} = 2\alpha\right)$. كما نعرف أن زاويتان أضلاعهما متعامدة هما متساويان $\left(\widehat{M'AM} = 2\alpha = \left(\vec{v}_r, \overrightarrow{OX}\right)\right)$. $\vec{v}$ مماسي للمسار الدائري في النقطة M.



ننظر إلى الشكل – ب – : $\vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \Rightarrow v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a.v_r.\cos\alpha}$

$$\left.\begin{array}{l} v_e = \sqrt{4R^2\omega^2\sin^2\dfrac{\omega t}{2} + R^2\omega^2 - 2R\omega.2R\omega\sin\dfrac{\omega t}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega t}{2}\right)} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega t}{2}\right) = \sin\dfrac{\omega t}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_e = R\omega = v}$$

إذن سرعة الجر تساوي سرعة انسحاب مركز الدائرة بالنسبة للمعلم الثابت XOY و هذا ما يتوافق مع المنطق. $\vec{v}_e$ يوازي المحور OX.

التمرين 33.4

1/ نطلق من شعاع الموضع بالإحداثيات القطبية في المعلم المتحرك $X'O'Y'$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}=\vec{r}=\vec{r}\,'=r.\vec{u}_r\\ r=r_0\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right)\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\vec{r}=r_0\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

السرعة النسبية: في المعلم المتحرك يعتبر شعاع الواحدة $\vec{u}$ ثابتا.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r=\dot{r}.\vec{u}_r\\ r=r_0\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right)\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\vec{v}_r=r_0\omega\left(-\sin\omega t+\cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

لحساب سرعة الجر ندخل شعاع الدوران $\vec{\omega}$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_e=\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\\ \overrightarrow{OO'}=\vec{0}\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\vec{v}_e=\vec{\omega}\wedge\vec{r}}$$

نقوم بالعملية الحسابية:

$$\vec{v}_e=\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ 0 & 0 & \omega\\ r & 0 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow \boxed{\vec{v}_e=r_0\omega\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

باستعمال قانون تركيب السرعات يمكننا استنتاج السرعة المطلقة:

$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r\Rightarrow \boxed{\vec{v}_a=r_0\omega\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right)\vec{u}_\theta+r_0\omega\left(-\sin\omega t+\cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

نحسب شدة هذه السرعة لنتأكد أنها ثابتة:

$$\boxed{v_a=r_0\omega\sqrt{2}=Cte}$$

أما التسارع النسبي:

$$\vec{a}_r=\ddot{r}.\vec{u}_r\Rightarrow \boxed{\vec{a}_r=r_0\omega^2\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

تسارع الجر نحسبه من العبارة العامة و نحذف ما هو معدوم:

$$\vec{a}_e=\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0}+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}+\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{0}\quad\Rightarrow \boxed{\vec{a}_e=\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}$$

نحسب الجداء الشعاعي المضاعف:

$$\vec{v}_e=\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'=\vec{\omega}\wedge r=r_0\omega\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right).\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_e=\vec{\omega}\wedge r_0\omega\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_e=\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ 0 & 0 & \omega\\ 0 & r_0\omega\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right) & 0\end{vmatrix}\Rightarrow \boxed{\vec{a}_e=-r_0\omega^2\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

نحسب الآن التسارع التكميلي بتطبيق العلاقة:

$$\vec{a}_c=2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r=2.\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ 0 & 0 & \omega\\ r_0\omega\left(-\sin\omega t+\cos\omega t\right) & 0 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow \boxed{\vec{a}_c=2r_0\omega^2\left(-\sin\omega t+\cos\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

نستنتج التسارع المطلق من قانون تركيب التسارعات: $\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_c$

بعد الحسابات اللازمة نجد عبارة التسارع المطلق:

$$\boxed{\vec{a}_a=2r_0\omega^2\left[\left(\cos\omega t+\sin\omega t\right)\vec{u}_r+\left(-\sin\omega t+\cos\omega t\right)\vec{u}_\theta\right]}$$

نتأكد أن طويلتها ثابتة:

$$\boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\sqrt{2} = Cte}$$

التمرين 35.4

1/ شعاع موضع الذبابة في المعلم المتحرك: $\boxed{\vec{r} = v.t..\vec{u}_r} \Rightarrow \overline{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r$

عبارتا السرعة و التسارع للذبابة في المعلم المتحرك:علينا أن ننتبه إلى أن $\theta \prec 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \prec 0$ و هذا راجع للاتجاه السالب الذي ينتقل فيه رقاص الثواني.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_M = \dot{\vec{r}} = v.\vec{u}_r + vt.\dot{\vec{u}}_r \\ \dot{\vec{u}}_r = (-\omega).\vec{u}_\theta\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_M = v.\vec{u}_r - vt\,|\omega|.\vec{u}_\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_M = \ddot{\vec{r}} = v.\dot{\vec{u}}_r - v|\omega|.\vec{u}_\theta - vt|\omega|.\dot{\vec{u}}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -(-\omega).\vec{u}_r \ , \ \dot{\vec{u}}_r = (-\omega).\vec{u}_\theta\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_M = -v\omega^2 t.\vec{u}_r - 2v|\omega|.\vec{u}_\theta}$$

2/ حساب الإحداثيات θ_M, x_M, y_M. نحصر النتائج في الجدول التالي:

$$v = \frac{0,2}{60} = \frac{10^{-2}}{3}(m/s) \ ; \ \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}(rad/s)$$

$$x_M = vt\cos\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t \ ; \ y_M = vt\sin\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t$$

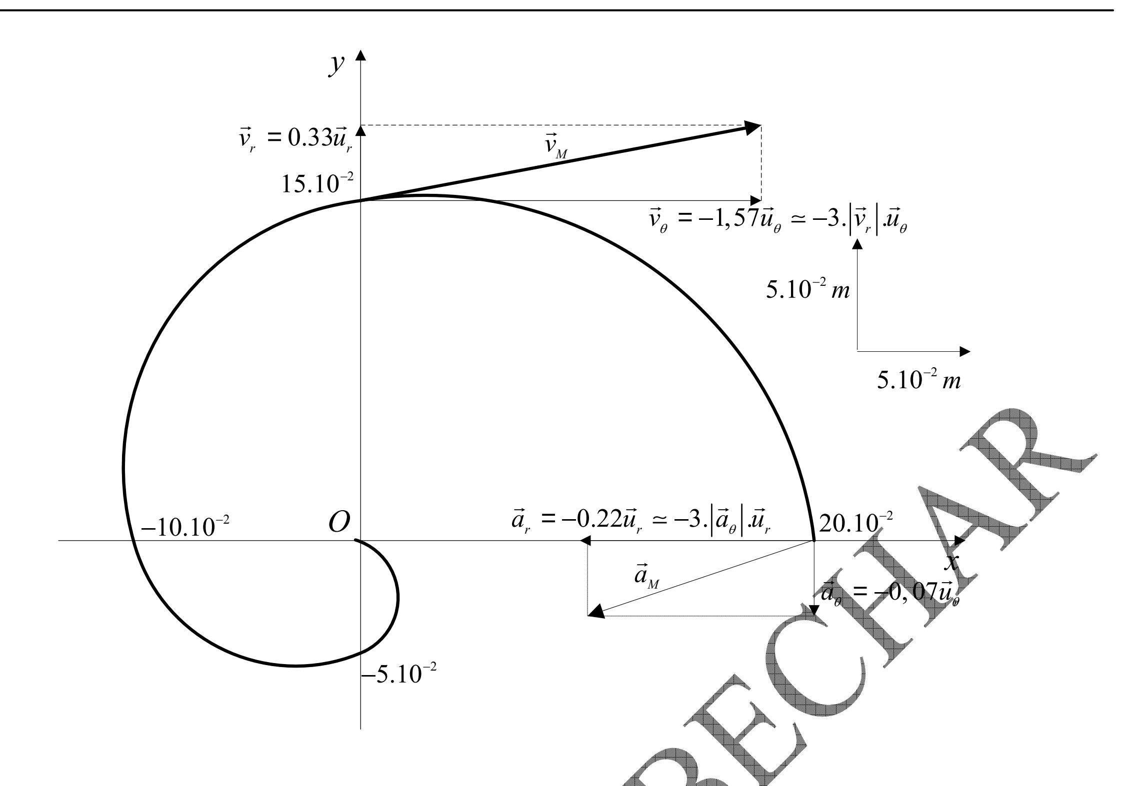
$t(s)$	0	15	30	45	60
$\theta_M = -\omega t \ (rad.s^{-1})$	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$	-2π
$r_M = vt \ (ms^{-1})$	0	-5.10^{-2}	10.10^{-2}	15.10^{-2}	20.10^{-2}
$x_M(m)$	0	0	-10.10^{-2}	0	20.10^{-2}
$y_M(m)$	0	-5.10^{-2}	0	15.10^{-2}	0

مثلنا الرسم البياني للمسار في نهاية الحل.

3/ لتمثيل السرعة و التسارع للذبابة بالنسبة للمعلم المتحرك نحسب في البداية طويلتي كل من المقدارين في اللحظات المحددة.

• $t = 45s$: $v_M = v.\vec{u}_r - v.t.\omega.\vec{u}_\theta$ $\vec{v}_r = 0,33.\vec{u}_r \ ; \ \vec{v}_\theta = -1,57.\vec{u}_\theta$	t=60s: $\vec{a}_M = -v\omega^2 t..\vec{u}_r - 2v\omega.\vec{u}_\theta$ $\vec{a}_r = -0,22.\vec{u}_r \ ; \ \vec{a}_\theta = -,07.\vec{u}_\theta$

أخذنا كسلم للسرعة طويلة شعاع السرعة القطرية. و أخذنا كسلم للتسارع طويلة شعاع التسارع العرضي.



التمرين 36.4:

1/ نكتب عبارة شعاع الموضع في المعلم الساكن OXY بملاحظة الشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

خلال الزمن t، الزاوية التي مسحتها النقطة A بالنسبة للمعلم الثابت هي: $\theta = \omega t$.

الزاوية التي تمسحها النقطة M خلال الزمن نفسه t بالنسبة للمعلم المتحرك $O'X'Y'$ تساوي كذلك $\theta = \omega t$ و لكن تمسح الزاوية $2\theta = 2\omega t$ بالنسبة للمعلم الساكن OXY.

سرعة و تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم OXY هما السرعة و التسارع المطلقان.

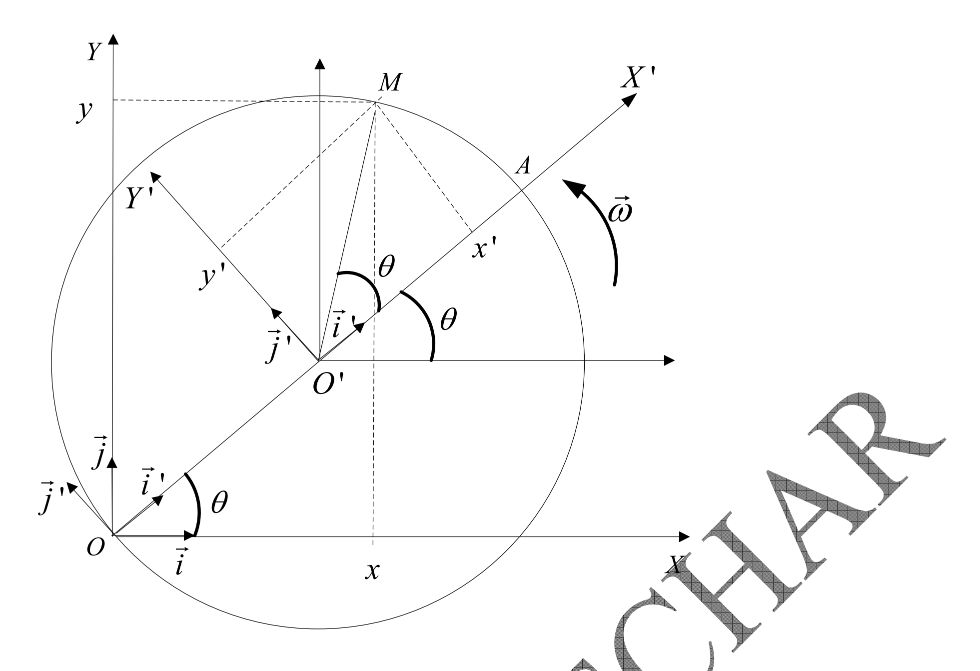
استنادا إلى الشكل فإن:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OO'} &= R\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j}\\ \overrightarrow{O'M} &= R\cos 2\omega t.\vec{i} + R\sin 2\omega t.\vec{j}\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(R\cos\omega t + R\cos 2\omega t\right)\vec{i} + \left(R\sin\omega t + R\sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

نقوم باشتقاقين متتاليين لـــ $\overrightarrow{OM}$ لنحصل على السرعة و التسارع المطلقين:

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \;,\; \boxed{\vec{v}_a = -R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (1)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} \;,\; \boxed{\vec{a}_a = -R\omega^2\left(\cos\omega t + 4\cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + 4\sin 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (2)$$



2/ نكتب عبارة شعاع الموضع في المعلم المتحرك $O'X'Y'$ بملاحظة الشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' = R\left(\cos\omega t.\vec{i}' + \sin\omega t.\vec{j}'\right)}$$

سرعة و تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم $O'X'Y'$ هما السرعة و التسارع النسبيان. نقوم باشتقاقين متتاليين لــ $\overrightarrow{O'M}$ لنحصل على السرعة و التسارع النسبيين:

$$\vec{v}_{r'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \quad , \quad \boxed{\vec{v}_{r'} = R\omega\left(-\sin\omega t.\vec{i}' + \cos\omega t.\vec{j}'\right)}$$

$$\vec{a}_{r'} = \frac{d\vec{v}_{r'}}{dt} \quad , \quad \boxed{\vec{a}_{r'} = -R\omega^2\left(\cos\omega t.\vec{i}' + \sin\omega t.\vec{j}'\right)}$$

نكتب الآن عبارة شعاع الموضع في المعلم الساكن $O'XY$ بملاحظة الشكل:

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = R\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t\vec{j}\right)}$$

سرعة و تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم OXY. **لا** نقوم باشتقاقين متتاليين لــ $\overrightarrow{O'M}$ حتى نحصل على السرعة و التسارع النسبيين بالنسبة لــ OXY، **فهذا هو الخطأ الشائع الذي يجب تفاديه.**

يجب الاستعانة بالمعادلة (57.4).

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}$$

$$\vec{v}_r = \vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\underbrace{\frac{dz'}{dt}}_{0}$$

من الشكل يمكن تعيين:

$$\vec{i}' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\vec{j}' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \ ; \ y' = R\sin\omega t \rightarrow \dot{y}' = R\omega\cos\omega t$$

بالتعويض نحصل على:

$$\vec{v}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right).\left(-R\omega\sin\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(R\omega\cos\omega t\right)$$

$$\vec{v}_r = -2R\omega.\underbrace{\sin\omega t.\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{i} + R\omega\left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)\vec{j}$$

في الأخير السرعة النسبية للمتحرك M بالنسبة لـــ OXY تساوي:

$$\boxed{\vec{v}_r = R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (3)$$

التسارع النسبي للمتحرك M بالنسبة لـــ OXY لا يساوي مشتقة $\vec{v}$ بالنسبة للزمن و إنما نستعمل المعادلة (59.4):

$$\vec{a}_r = \vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2} + \underbrace{\vec{k}\,'\frac{d^2z'}{dt^2}}_{0}$$

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \ddot{x}' = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \;;\; y' = R\sin\omega t \rightarrow \ddot{y}' = -R\omega^2\sin\omega t$$

بالتعويض نصل إلى:

$$\vec{a}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\cos\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_r = \left(-R\omega^2\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right) + \left(R\omega^2 s\text{in}^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\underbrace{\cos^2\omega t - \sin^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right).\vec{i} - R\omega^2 2\underbrace{\cos\omega t\sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j}$$

في الأخير التسارع النسبي للمتحرك M بالنسبة لـــ OXY يساوي:

$$\boxed{\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (4)$$

3/ / ا/ سرعة الجر باستعمال قانون تركيب السرعات:

$$(1)-(3) = \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \left[-R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}\;\right] - \left[R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right).\vec{j}}$$

3/ ب/ تسارع الجر باستعمال قانون تركيب التسارعات:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overline{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + \underbrace{z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}}_{0}$$

$$\overline{OO'} = R.\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j} \quad , \quad \frac{d^2\overline{OO'}}{dt^2} = -R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{i}}' = -\omega^2 \cos\omega t.\vec{i} - \omega^2 \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{j}}' = \omega^2 \sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\,os\,\omega t.\vec{j} \; ; \qquad y' = R\sin\omega t$$

بالتعويض نصل إلى:

$$\vec{a}_e = \left(-R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2 \sin\omega t.\vec{j}\right) + R\cos\omega t\left(-\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) + R\sin\omega t\left(\omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\,os\,\omega t.\vec{j}\right)$$

في الأخير تسارع الجر للمتحرك M :

$$\vec{a}_e = \left[-R\omega^2.\cos\omega t - R\omega^2\left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)\right]\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + 2\underbrace{\sin\omega t.c\,os\,\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}\right)\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -R\omega^2.\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

إستنتاج تسارع كوريوليس أو التسارع التكميلي:

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'.d\vec{i}'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}'}{dt^2}\right]$$:59.4 أو من المعادلة $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = +\vec{a}_a - \vec{a}_r - \vec{a}_r}$

النتيجة واحدة:

$$\dot{\vec{i}}' = -\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j} \quad ; \quad \dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\dot{\vec{j}}' = -\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j} \; ; \; \dot{y}' = R\omega\cos\omega t$$

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'.d\vec{i}'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}'}{dt^2}\right] = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = 2\left[-R\omega\sin\omega t\left(-\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j}\right) + R\omega\cos\omega t\left(-\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[R\omega^2.\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\sin\omega t\cos\omega t.\vec{j} - R\omega^2.\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[R\omega^2.\left(\underbrace{\sin^2\omega t - \cos^2\omega t}_{-\cos\omega t}\right).\vec{i} - 2R\omega^2.\underbrace{\sin\omega t\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j}\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

عليك أن تتأكد بالحساب المباشر $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

4/ ندخل الآن شعاع الدوران $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$. نستعمل القانون المبرهن عليه في الدرس(72.4) لحساب مركبتي شعاع سرعة الجر:

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos 2\omega t & R\sin 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} - R\omega.\sin 2\omega t.\vec{i} + R\omega.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega.\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega.\left(\cos\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{j}}$$

نستعمل القانون المبرهن عليه في الدرس(73.4) لإيجاد التسارع التكميلي أو تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \Rightarrow \vec{a}_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega.\sin 2\omega t & R\omega.\cos 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_c = -2R\omega^2.\cos 2\omega t.\vec{i} - 2R\omega^2.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2.\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

V / تحريك النقطة المادية
DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

مقدمة:

إذا كان علم الحركيات يختص بوصف الحركات ، فإن علم التحريك يختص بدراسة العلاقة بين حركة الجسم و مسببات تلك الحركة.

يختص علم التحريك في التنبؤ بحركة الجسم في محيط معين.

و بمفهوم أعمق، فإن دراسة التحريك هي تحليل العلاقة بين القوة و تغيرات حركة الجسم.

1/مبدأ العطالة لغليلي(أو القانون الأول لنيوتن 1642-1727)

(Principe d'inertie ou première loi de Newton)

نص المبدإ: إذا كان جسم مادي غير خاضع لأية قوة فإنه :

- إما في حركة مستقيمة منتظمة ،
- إما في سكون إذا كان منذ البداية في سكون.

بالنسبة لجسيمة فإن نص مبدإ العطالة هو: "**الجسيمة الحرة و المعزولة تتحرك وفق مسار مستقيم بسرعة ثابتة**".

لذا نقول عن جسيمة متسارعة أنها ليست حرة و لا معزولة و إنما خاضعة بدون أدنى شك لقوة.

و بما أن الحركة مفهوم نسبي ، فلابد من تحديد المعلم الذي تنسب له حركة الجسيمة الحرة : هذا المعلم هو بدوره ينبغي أن يكون حرا (و لذا يسمى معلم غليلي أو عطالي و فيه تنتقل الجسيمة بسرعة ثابتة).

2/ كمية الحركة: (quantité de mouvement)

❖ **تعريف:** كمية الحركة لجسيمة هي جداء كتلتها بشعاع سرعتها.

$$\vec{p} = m.\vec{v} \qquad (1.5)$$

الشكل 1.5: كمية الحركة

كمية الحركة مقدار شعاعي و هو مفهوم مهم جدا لأنه يشمل عنصرين يميزان الحالة التحريكية للجسيمة: **كتلتها** و **سرعتها**.

يمكن الآن إعطاء نصا جديدا لمبدأ العطالة:" **تنتقل الجسيمة الحرة دائما بكمية حركة ثابتة**".

❖ **إنحفاظ كمية الحركة:** (conservation de la quantité de mouvement)

إذ كان هناك تغير في السرعة أو في كمية الحركة فهذا يدل على أن الجسيمة ليست حرة.

نفترض وجود جسيمتين حرتين غير خاضعتين إلا للتأثرات المتبادلة بينهما وبالتالي فهما معزولتان عن باقي الكون:

في اللحظة t : $\vec{p} = m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2$

و في اللحظة t' : $\vec{p}' = m_1.\vec{v}_1' + m_2.\vec{v}_2'$

أثبتت التجارب أن $\vec{p}=\vec{p}'$ أي أن كمية الحركة الكلية ، لجملة مكونة من جسيمتين خاضعتين لتأثيرهما المتبادل فقط ، تبقى ثابتة .

مثلا: في ذرة الهيدروجين: كمية حركة الجسيمتين (البروتون + الإلكترون) تبقى ثابتة طيلة الزمن كما هو الحال بالنسبة للأرض و القمر أي $\Delta\vec{p} = \vec{0}$.

إذا عممنا هذا فإن مبدأ انحفاظ كمية الحركة ينص على أن:

" **كمية الحركة الكلية لجملة معزولة من الجسيمات تكون ثابتة** "

مثلا: كمية حركة جزيء الماء المتكون من ذرة أكسيجين و ذرتي هيدروجين ثابتة ، و هو الشيء نفسه بالنسبة للمجموعة الشمسية.

يمكن التعبير رياضيا عن مبدإ انحفاظ كمية الحركة لجملة مادية بالصيغة التالية:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots\dots\dots\dots + \vec{p}_n = C^{te}$$ **ثابت** : C^{te}

في حالة جسيمتين: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = C^{te}$

بين لحظتين t و t' :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2}$$

" التغير في كمية الحركة لجسيمة خلال مجال زمني ما يساوي و يعاكس التغير في كمية الحركة للجسيمة الأخرى خلال نفس الزمن".

و بعبارة أخرى فإن ما تكتسبه الجسيمة الأولى على شكل كمية في الحركة تفتقده الجسيمة الثانية على نفس الشكل و العكس بالعكس غير أن كمية الحركة للجملة المعزولة تبقى ثابتة.

3/ قوانين نيوتن الأخرى: (les autres lois de Newton)

القانون الثاني لنيوتن:(و هو تعريف أكثر منه قانونا)(deuxième loi de Newton)

" المشتقة لكمية حركة الجسيمة بالنسبة للزمن تسمى قوة "

أي أن المحصلة $\vec{F}$ للقوى المطبقة على الجسيمة هي:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad (2.5)$$

نسمي هذه المعادلة "معادلة الحركة" (équation du mouvement)

▪ **الكتلة ثابتة:** تبعا لهذا ، فإذا كانت الكتلة m ثابتة (و هذا ما هو شائع كثيرا في الميكانيك النيوتني) فإن:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m.\vec{a}} \qquad (3.5)$$

▪ **حالة خاصة:** إذا كانت المحصلة $\vec{F}$ ثابتة فإن التسارع $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ هو كذلك ثابت و الحركة تكون مستقيمة متغيرة بانتظام.

و هذا هو الذي يحدث بالضبط للأجسام التي تسقط على الأرض تحت تأثير قوة الجاذبية أو ما نسميه **الثقل**: $\vec{P} = m.\vec{g}$

▪ **الكتلة متغيرة:** في هذه الحالة فإن المحصلة $\vec{F}$ تكتب على الشكل:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}.\frac{dm}{dt}} \qquad (4.5)$$

مثال 1.5: يخضع جسم كتلته $10kg$ لقوة $F=(120t+40)N$ و ينتقل على خط مستقيم. في اللحظة $t=0$ ، يوجد الجسم في $x_0=5m$ ، بسرعة $v_0=6ms^{-1}$. أوجد سرعته و موضعه بدلالة الزمن.

الحل:

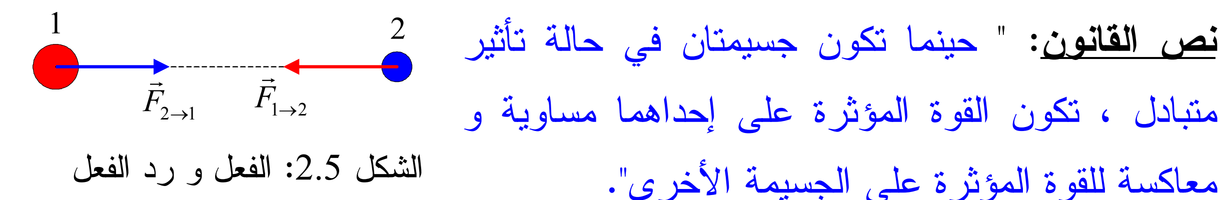
باستعمال المعادلة (3.5) نجد: $F=120t+40=10a$ حيث $a=(12t+4)ms^{-2}$

للحصول على العبارة اللحظية للسرعة نكامل عبارة التسارع. وبما أن $\dfrac{dv}{dt}=12t+4$

فإن: $\int_0^v dv=\int_0^t(12t+4)dt \Rightarrow \boxed{v=6t^2+4t+6}\,(ms^{-1})$

نكامل من جديد، و هذه المرة عبارة السرعة اللحظية ، فنحصل على موضع الجسم في كل لحظة: $\int_0^x dx=\int_0^t vdt=\int_0^t(6t^2+4t+6)dt \Rightarrow \boxed{x=2t^3+2t^2+6t+5}\,(m)$

❖ **القانون الثالث لنيوتن**: (مبدأ الفعل و رد الفعل) (troisième loi de Newton)



الشكل 2.5: الفعل و رد الفعل

نص القانون: " حينما تكون جسيمتان في حالة تأثير متبادل ، تكون القوة المؤثرة على إحداهما مساوية و معاكسة للقوة المؤثرة على الجسيمة الأخرى."

هذا ما هو مبين على الشكل 2.5 و يمكّننا من كتابة:

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2}=-\vec{F}_{2\to1}} \qquad (5.5)$$

4/ مفهوم القوة و قانون القوة: (notion de force et loi de force)

تعريف القوة بالمعادلة $\vec{F}=m.\vec{a}$ يسمح لنا بالتعبير عن القوة المناسبة للتأثير المدروس بدلالة العوامل الفيزيائية كالمسافات، الكتلة ، الشحنة الكهربائية للأجسام...... حينها نجد "**قانون القوة**" .

قانون القوة:(أو قانون التأثيرات المتبادلة): يوضح هذا القانون عبارة القوة $\vec{F}$ (المحصلة) المطبقة على نقطة مادية في حالة معينة.

فمثلا: العبارة $\vec{P}=m.\vec{g}$ هي قانون القوة الذي يعرّف ثقل جسم بجوار الأرض و الذي يسمح لنا بالتنبؤ بحركة أي جسم في حقل الجاذبية الأرضية.

بامتلاك العبارة $\vec{F}=m.\vec{a}$ يمكننا معرفة سلوك الجمل الفيزيائية بل أكثر من هذا، نتمكن حتى من التنبؤ بتطورها.

يمكن تلخيص هذه الحالة بالمعادلة الرمزية:

الفيزياء=ميكانيك + قوانين القوة

بعد أن نعرف قوانين القوة المناسبة لمختلف التأثيرات المتبادلة يمكننا بعدها تنبؤ أو توقع حركة جسم مادي خاضع لقوى في شروط ابتدائية محددة.

في ما يأتي سنضع و نطلع على التوالي على القوانين الخاصة بــ:

- التأثيرات المتبادلة للجاذبية بجوار الأرض ،
- التجاذبات المتبادلة في حالة الجذب العام ،
- الإحتكاكات ،
- التأثيرات المتبادلة المرنة.

5/ حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية:

(mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre)

كل القذائف التي تسقط سقوطا حرا بجوار الأرض لها نفس التسارع الثابت $\vec{g}$ و الموجه نحو الأسفل. يمكن كتابة $\vec{g}$ على الشكل: $\vec{g}=-g.\vec{j}=-9.8\vec{j}(m/s^2)$.

يمكن التنبؤ بحركة قذيفة أطلقت بسرعة ابتدائية $\vec{V}_0$ تصنع زاوية α مع الأفق.

تعلمنا في الطور الثانوي أن الدراسة تشتمل أساسا على تعيين:

- مركبتي السرعة:

$$V_x(t)=V_{0x}=V_0.\cos\alpha$$
$$V_y(t)=-gt+V_{0y}=-gt+V_0\sin\alpha$$

- المعادلتين الزمنيتين :

$$x(t)=V_0.\cos\alpha.t \quad (t=0;\ x=0)$$
$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+V_0.\sin\alpha.t+y_0$$

- معادلة المسار: نحصل عليها بحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين السابقتين:

$$y=-\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2+(tg\alpha).x+y_0$$

- ذروة المسار: $(g<0)$ $y_{max}=h=-\dfrac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2g}$
- المدى الأفقي: $(g<0)$ $x_{max}=-\dfrac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g}$

لاسترجاع الذكريات نتناول المثال التالي و على الطالب أن يتأكد من النتائج المعطاة.

مثال2.5:

تطلق قذيفة من مستوى الأرض شاقوليا نحو الأعلى بسرعة $10m.s^{-1}$.

ا/ أي ارتفاع تبلغه القذيفة ؟

ب/ ما هي سرعة القذيفة بعد $1.5s$ منذ قذفها ؟

ج/ ما هي المدة الفاصلة بين لحظة القذف و لحظة ارتطام القذيفة مع الأرض ؟

الأجوبة: ا/ $5.1m$ ب/ $4.7m.s^{-1}$ ج/ $2.04s$

6/ قانون الجذب العام: (loi de la gravitation universelle)

قانون الجذب العام لنيوتن الذي وضعه سنة 1685 هو أساس النظرية التي تفسر كثيرا من الظواهر بدءا بحركة الكواكب و وصولا إلى السقوط الحر للأجسام مرورا بالمد و الجزر للبحر.

يفسر هذا القانون قوة التجاذب بين جسمين ذي كتلتين M_1 و M_2 تفصل بينهما مسافة d حيث تنشأ بينهما قوتي تجاذب $\vec{F}_1=-\vec{F}_2$.

$$\vec{F}_1=G\frac{M_1.M_2}{d^2}\vec{u}\Rightarrow \boxed{F_1=G\frac{M_1.M_2}{d^2}} \qquad (6.5)$$

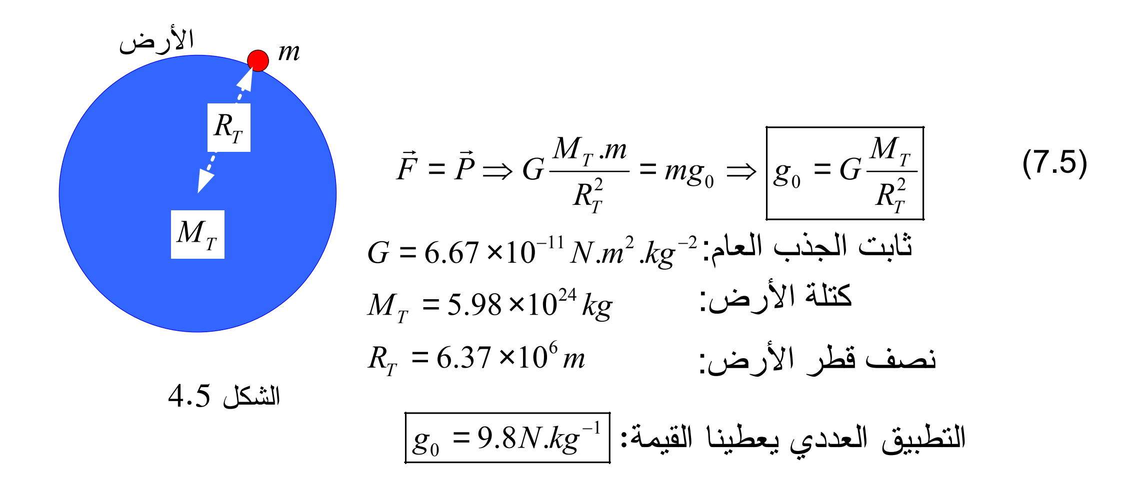
الشكل:3.5

حقل الجاذبية: (champ gravitationnel)

قوة الجاذبية الأرضية هي الثقل. في ما فات كنا نحسب الثقل بواسطة تسارع الجاذبية $\vec{g}$.

بفضل قانون الجذب العام لنيوتن و قانون القوة للثقل يمكن تحديد عبارة $\vec{g}$:

- **على سطح الأرض:** نحصل على قيمة شعاع حقل الجاذبية الأرضية كما يلي:



الشكل 4.5

$$\vec{F} = \vec{P} \Rightarrow G\frac{M_T.m}{R_T^2} = mg_0 \Rightarrow \boxed{g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}} \qquad (7.5)$$

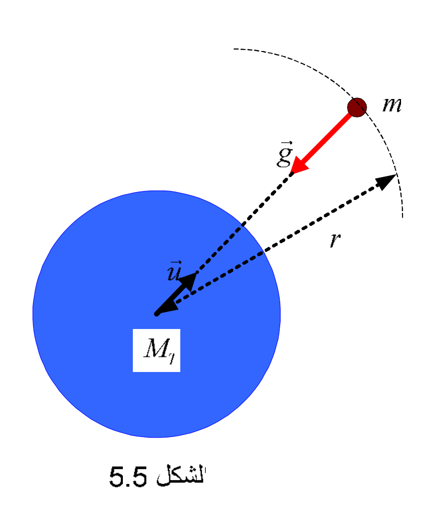
ثابت الجذب العام: $G = 6.67\times10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$

كتلة الأرض: $M_T = 5.98\times10^{24}\,kg$

نصف قطر الأرض: $R_T = 6.37\times10^{6}\,m$

التطبيق العددي يعطينا القيمة: $\boxed{g_0 = 9.8N.kg^{-1}}$

▪ **على ارتفاع Z من سطح الأرض:** شعاع حقل الجاذبية الأرضية على ارتفاع Z من سطح الأرض أي على البعد $r = R_T + Z$ من مركز الأرض نحصل عليه بالتحليل التالي:



الشكل 5.5

على سطح الأرض: $P_0 = mg_0 = G\dfrac{m.M_T}{R_T^2}$

على البعد r عن سطح الأرض: $P = mg = G\dfrac{m.M_T}{r^2}$

و منه فإن:

$$\boxed{g = g_0\frac{R_T{}^2}{r^2}} \qquad (8.5)$$

أما العبارة الشعاعية فهي:

$$\vec{g} = -g_0\frac{R_T{}^2}{r^2}\vec{u} \qquad (9.5)$$

مثال 3.5:

للشمس كتلة $1.99\times10^{30}\,kg$ ، للأرض كتلة $5.98\times10^{24}\,kg$ و للقمر كتلة $7.36\times10^{22}\,kg$.
نصف القطر المتوسط لمدار الأرض حول الشمس هو $1.496\times10^{11}\,m$ كما أن نصف القطر المتوسط لمدار القمر حول الأرض هو $3.84\times10^{8}\,m$.

ا/ أحسب الشدة المتوسطة لحقل الجاذبية الشمسية على طول مدار الأرض حول الشمس.

ب/ أحسب الشدة المتوسطة لحقل جاذبية القمر على طول مدار الأرض حول الشمس.

الأجوبة: ا/ $5.9\times10^{-3}\,N.kg^{-1}$ ب/ $3.33\times10^{-5}\,N.kg^{-1}$

تطبيق: الأقمار الإصطناعية: (satellites artificiels)

في عصرنا الحديث تطورت تكنولوجيا الاتصالات اللاسلكية، و من أهم الأسباب تمكّن الإنسان من غزو الفضاء و وضع أقمار اصطناعية ساكنة بالنسبة للأرض، أي أنها تدور بنفس السرعة التي تدور بها الأرض. كل هذا لضمان الاتصالات عل مدار الساعة بدون انقطاع بسبب دوران الأرض.

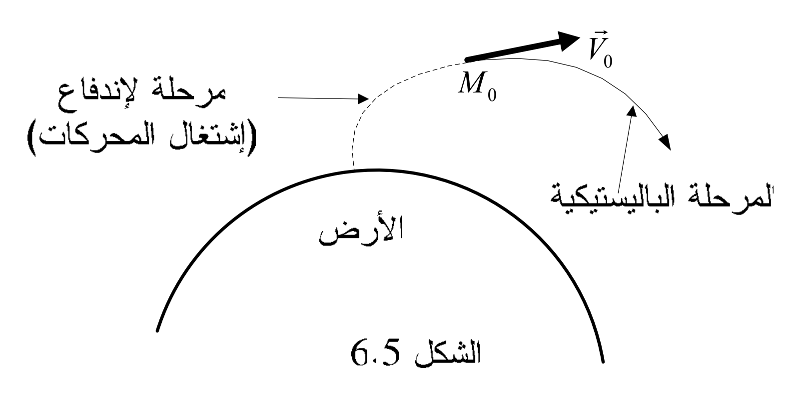
أدت الحسابات إلى أن الارتفاع المناسب للشرط الموضوع أعلاه هو $z = 42.1\times10^{6}\,m$ و أن سرعة الدوران هي: $v = 3.08\times10^{3}\,m.s^{-1}$.

(على الطالب أن يتحقق من هاتين القيمتين)

و بالفعل فإن على هذا ألارتفاع عن سطح الأرض و بهذه السرعة تدور الأقمار الاصطناعية الجيومركزية كما توقعت الدراسات .

و كإضافة و من باب الإطلاع يمكن إضافة بعض المعلومات الخاصة بإطلاق الأقمار الاصطناعية لما لها من مكانة جد هامة في عصرنا الحديث.

القوة الوحيدة المؤثرة على القمر الاصطناعي هي الثقل أو قوة الجاذبية. المرحلة المدروسة هنا هي المرحلة الباليستيكية أي المرحلة التي يبلغ فيها القمر الاصطناعي النقطة M_0 . حسب الشكل 6.5 في هذه النقطة تمثل $\vec{V}_0$ السرعة الابتدائية الجيومركزية للقمر المدروس و r_0 المسافة بين مركز الأرض و M_0 بحيث يتراوح ارتفاعها عن سطح الأرض ما بين 100 و 200 كيلومتر كما أن المدار لا يجب أن يبعد كثيرا عن الأرض بحيث لا يتجاوز بضع عشرات مرات نصف قطر الأرض و ذلك من أجل إهمال تأثيرات القمر الطبيعي و الشمس.



الشكل 6.5

نتجاوز البراهين و نعطي التعارف التالية:

❖ السرعة الكونية الأولى: (première vitesse cosmique)

السرعة الكونية الأولى هي السرعة الدائرية الجيومركزية لقمر اصطناعي مداره منخفض (ما بين 100 و 200 كيلومتر عن سطح الأرض) تحسب بالعبارة :

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{M_T G}{r_0}}} \qquad (10.5)$$

إذا قبلنا $r_0 \approx R_T = 6400km$ فإن الحسابات تعطينا:

$$g_0 = \frac{M_T G}{R_T^2} \approx 10m.s^{-2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{Rg_0}} \simeq \sqrt{64.10^6} \Rightarrow \boxed{V_1 = 8000ms^{-1}}$$

❖ السرعة الكونية الثانية: (deuxième vitesse cosmique)

السرعة الكونية الثانية هي السرعة الجيومركزية التي يجب أن يبلغها القمر الاصطناعي حتى يتحرر من جاذبية الأرض. تحسب بالعبارة:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2M_T G}{r_0}} \Rightarrow \boxed{V_2 = V_1\sqrt{2}} \qquad (11.5)$$

إذا اعتبرنا النقطة M_0 بجوار الأرض فإن $\boxed{V_2 \approx 11000ms^{-1}}$

❖ السرعة الكونية الثالثة : (troisième vitesse cosmique)

السرعة الكونية الثالثة هي السرعة الجيومركزية التي يجب أن يبلغها القمر الاصطناعي حتى يتحرر من المجموعة الشمسية.

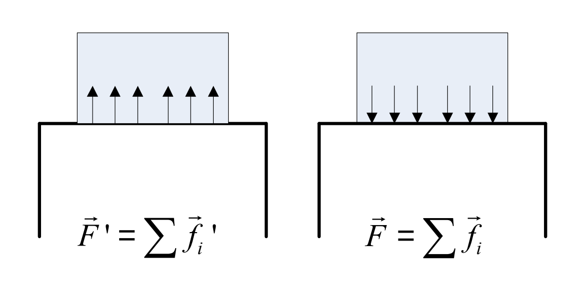
أدت الحسابات إلى القيمة :

$$\boxed{V_3 = 16800ms^{-1}} \qquad (12.5)$$

7/ قوى التلامس أو قوى الترابط: (forces de liaison ou forces de contact)

نفهم هنا أننا نتكلم عن القوى المؤثرة بالتبادل بين جسمين متلامسين.

يمثل الشكل 7.5 جسما صلبا موضوعا على طاولة. الجسم في توازن على الطاولة أي أن التسارع معدوم $\vec{a} = \vec{0}$.



الشكل 7.5: قوى التلامس

مقابل القوة $\vec{F}$ ، و التي هي محصلة كل تجاذبات الجزيئات المكونة للجسم ، و المطبقة على الطاولة ، تطبق الطاولة القوة $\vec{F}'$ ، و هي محصلة كل تجاذبات الجزيئات المكونة لسطح الطاولة الملامس للجسم. تسمى القوتان $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ بقوى التلامس كما يمكن تسميتها قوى الارتباط نظرا لوصل الجسمين ببعضهما.

8/ قوى الإحتكاك: (forces de frottement)

كل ما كان تلامس بين سطحين خشنين لجسمين صلبين إلا و كانت هناك مقاومة تعاكس الحركة النسبية للجسمين. هناك أنواع من الاحتكاكات:

- الاحتكاك بين الأجسام الصلبة ومنها السكونية والحركية ،
- الإحتكاكات في الموائع.

❖ **قوة الإحتكاك السكوني:** (force de frottement statique)

قوة الاحتكاك السكوني هي القوة التي تبقي جسما في حالة سكون و لو بوجود قوى خارجية.

- حالة جسم موضوع على مستوى أفقي:

يجب تطبيق قوة دنيا (صغرى) $\vec{F}$ حتى يتحرك الجسم الموضوع على الطاولة (الشكل 8.5).

$\vec{N}$ $\vec{F}$ θ $\vec{f}_s$ $\vec{P}$

الشكل 8.5 : قوة الاحتكاك

الجسم في سكون: $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$

بالإسقاط على المحورين الأفقي و الشاقولي:

$$\left.\begin{array}{l} N + F.\sin\theta - P = 0 \\ F.\cos\theta - f_s = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f_s = F.cos\theta}$$

لو كانت الزاوية θ معدومة لكانت $f_s = F$ و $P = N$. لاحظ أن $P \neq N = P - F.\sin\theta$ يبقى الجسم ساكنا حتى تتمكن القوة المطبقة $\vec{F}$ من اقتلاعه عن السطح. مباشرة قبل الاقتلاع تبلغ قوة الإحتكاك قيمتها الأعظمية المحددة بالقانون: $f_s = h_s.N$ حيث h_s معامل الإحتكاك السكوني و N القوة الناظمية.

و عليه يصبح لدينا:

$$\boxed{f_s \leq f_{s,\max} = h_s.N} \qquad (13.5)$$

في مثالنا هذا :

$$N = P - F\sin\theta \Rightarrow \boxed{f_{s,\max} = h_s.N = h_s(P - F\sin\theta)}$$

لا بد أن تكون $N > 0$ وبالتالي فإن $P > F.\sin\theta$ و إلا فإن الجسم يرتفع عن السطح.

مثال 4.5:

وضع جسم ثقله $80N$ على سطح أفقي خشن. نطبق عليه قوة شدتها $20N$ تصنع الزاوية $30°$ مع الأفق. معامل الإحتكاك السكوني 0.30.

ا/ ما شدة قوة الإحتكاك السكوني ؟

ب/ ما شدة القوة الناظمية ؟

ج/ ما شدة قوة الإحتكاك السكوني الأعظمية ؟

د/ كم يجب أن تبلغ شدة القوة المطبقة حتى يقلع الجسم ؟

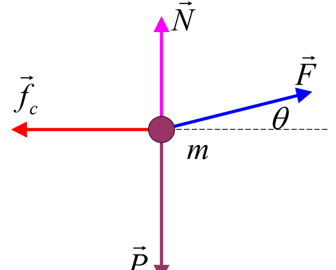
الأجوبة: ا/ $f = 17.3N$ ب/ $N = 70N$ ج/ $f_{s,\max} = 21N$ د/ $F = 24.1N$

❖ قوة الإحتكاك الحركي: (force de frottement cinétique)

قوة الاحتكاك الحركي هي القوة التي تقاوم الحركة عندما ينتقل جسم على سطح خشن و تحسب شدتها بالقانون:

$$\boxed{f_c = h_c.N} \qquad (14.5)$$

في حالة قوى الاحتكاك السكوني <u>الجسم في سكون</u> ، بينما هنا في حالة الاحتكاكات الحركية فإن <u>الجسم في حركة</u>.



الشكل9.5

انطلاقا من المثال السابق، و باعتبار الآن الجسم في حركة (شكل9.5) ، يمكن تحديد عبارة قوة الاحتكاك لحركي بعد أن نضع عبارة القوة الناظمية:

$$N + F.\sin\theta - P = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} N = P - F.\sin\theta \\ f_c = h_c.N \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f_c = h_c.(P - F.\sin\theta)}$$

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على المثال السابق باعتبار m كتلة الجسم، يمكننا كتابة:

$$F.\cos\theta - f_c = ma \Rightarrow \boxed{f_c = F.\cos\theta - ma}$$

حيث h_c يرمز إلى معامل الاحتكاك الحركي(أو التحريكي) و N تمثل القوة الناظمية.

هنا لا حديث عن قوة احتكاك أعظمية. نترك الطالب يبحث عن عبارة التسارع.

مثال 5.5 :

ينزلق جسم كتلته $10,2kg$ على مستوى أفقي خشن تحت تأثير قوة شدتها $20N$. حامل القوة يصنع مع الأفق زاوية مقدارها $45°$ إلى الأعلى. معامل الاحتكاك الحركي $0,15$. نأخذ $g=9,8ms^{-2}$. أحسب شدة:

ا/ القوة الناظمية، ب/ قوة الإحتكاك الحركي، ج/ محصلة القوى ، د/ التسارع المكتسب.

الأجوبة:ا/ $N=85.82N$ ب/ $f_c=12.9N$ ج/ $F_R=1.24N$ د/ $a=0.12ms^{-2}$

❖ **الإحتكاكات في الموائع:**

حين ينتقل جسم صلب في مائع (غاز أو سائل) بسرعة ضعيفة نسبيا تنشأ قوة احتكاك تحسب بالقانون:

$$\boxed{\vec{f}_f=-K\eta.\vec{v}} \qquad (15.5)$$

K : معامل يتعلق بشكل الجسم المتحرك داخل المائع.

فمثلا: بالنسبة لكرة نجد $K=6\pi.R$ و منه فإن

$$\boxed{\vec{f}_f=-6\pi.R.\eta.\vec{v}} \qquad (16.5)$$

المعروف بقانون سطوكس $(Loi\ de\ Stokes)$

η: معامل يتعلق بالاحتكاكات الداخلية للمائع (أي قوة الاحتكاك بين مختلف طبقات المائع والتي تتحرك بسرعات مختلفة). الاحتكاك الداخلي في الموائع يسمى اللزوجة لذا يسمى η بمعامل اللزوجة. في السوائل ينخفض معامل اللزوجة بارتفاع درجة الحرارة بينما يزداد بارتفاع درجة الحرارة في الغازات.

9/ القوى المرنة:(forces élastiques)

القوى المرنة تحدث حركات دورية.

مثلا: في دراستنا للحركة المستقيمة الجيبية رأينا أن التسارع يحسب بالعبارة:

$$\vec{a}=-\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك نستطيع كتابة:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = m.\vec{a} \;\; ; \;\; \vec{F} = -m\omega^2 .\overrightarrow{OM} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k.\overrightarrow{OM}} \qquad (17.5)$$

و هذا يعني أن في الحركة المستقيمة الجيبية تكون محصلة كل القوى المطبقة على النقطة المادية تتناسب طردا مع شعاع الموضع و تعاكسه في الاتجاه و هي موجهة دائما نحو المركز(ولهذا السبب تسمى بالقوة المركزية) و لا تنعدم إلا في المبدإ.

بالإسقاط على المحور OX نتوصل إلى قانون القوة في هذه الحالة:

$$\boxed{F = -kx} \qquad (18.5)$$

10/قوى العطالة أو شبه القوة: (forces d'inertie ou pseudo forces)

سبق لنا و أن صادفنا في دراستنا للحركة النسبية علاقة تركيب التسارعات:

$$a_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

بالنسبة للمعلم العطالي المطلق فإن المراقب المرتبط به يكتب:

$$\vec{F} = m\vec{a}_a = m\frac{d\vec{v}_a}{dt} \;\; ; \;\; \vec{v} = \vec{v}_a \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad (19.5)$$

بالنسبة للمعلم النسبي و هو غير عطالي فإن المراقب المرتبط به يكتب:

$$\vec{F} = m\vec{a}_r = m\frac{d\vec{v}_r}{dt} \;\; ; \;\; \vec{F} = m(\vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c)$$

نضع $\vec{v}_r = \vec{v}$ ثم نكتب :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c} \qquad (20.5)$$

<u>**الخلاصة**</u> : في المعلم الغليلي نكتب : $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

في المعلم الغير غليلي نكتب : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

بمقارنة العبارتين المتوصل إليهما يمكن استنتاج ما يلي: يمكن تطبيق قانون التحريك في مرجع غير غليلي (R) بشرط أن نضيف إلى الحد $\vec{F}$ والذي يمثل القوى "الحقيقية" ، أي

القوى الناتجة عن تأثيرات متبادلة فعلية ، نضيف الحدين $\vec{F}_e$ و $\vec{F}_c$ و المعروفين على التوالي بقوة الجر و قوة كوريوليس.

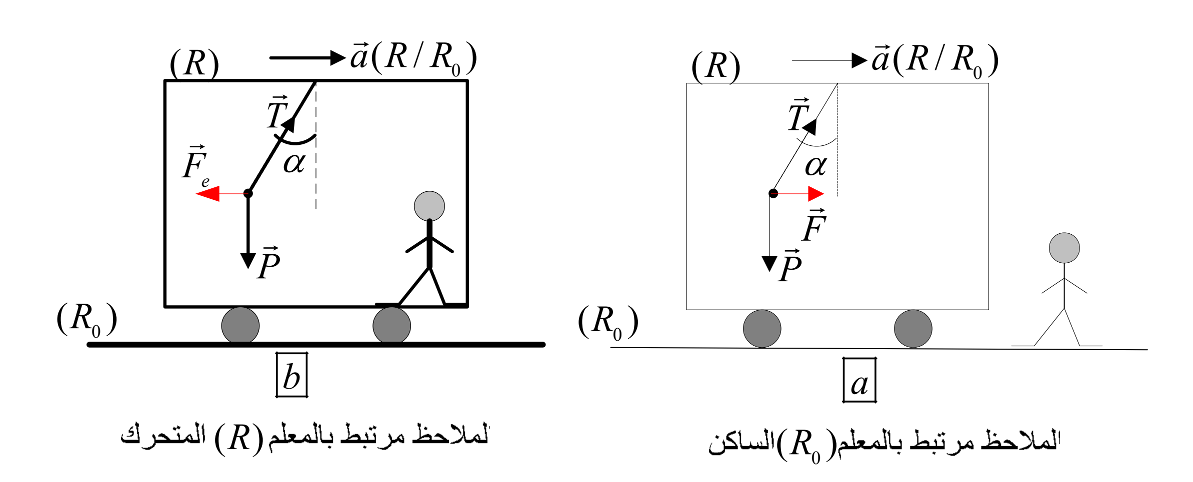
هذان الحدان يترجمان الشكل الغير عطالي للمرجع (R).

كل نتائج الميكانيك النيوتني يمكن استعمالها في مرجع غير عطالي بشرط أن نضيف آثار قوى العطالة إلى آثار القوى الحقيقية.

<u>مثلا</u>: * راكب في حافلة تتوقف به فجأة أو تقلع به فجأة فهو وحده يحس بقوة العطالة.

*دراج على ما يسمى "بجدار الموت".

- **<u>مثال تطبيقي</u>:** نواس معلق إلى سقف عربة في حركة انسحابية متسارعة (أنظر الشكل 10.5).



الشكل 10.5

لنرى وجهتي نظر المراقبين: الأول مرتبط بالأرض و هو واقف ، و المراقب داخل العربة المتحركة. الملاحظان يريان انحراف النواس عكس اتجاه حركة العربة.

<u>بالنسبة للمراقب الأول</u>: الكتلة في حركة و تسارعها $\vec{a}$. فهو يطبق المعادلة (19.5) بحيث يكتب:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{P}+\vec{T}$$

<u>بالنسبة للمراقب الثاني</u>: الكتلة m في توازن نسبي. هذا المراقب يعتبر أن القوتين $\vec{P}$ و $\vec{T}$ توازنهما قوة العطالة $\vec{F}_e$ حيث يكتب: $\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e=\vec{0}$

بمقارنة ما كتبه المراقبان نستنتج أن قوة العطالة هي: $\boxed{\vec{F}_e=-m\vec{a} \;\; ; \;\; F_e=ma}$.

معادلة الحركة المطبقة على النواس في المعلم (R) تكتب:

$$m\frac{dv}{dt}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e+\vec{F}_c$$

إلا أن قوة كوريوليس معدومة لأن (R) في حركة انسحابية بالنسبة للمعلم (R_0).

و بالتالي فإن $m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=m(\vec{g}-\vec{a})+\vec{T}$

نضع $\vec{g}'=\vec{g}-\vec{a}$ مما يسمح لنا بكتابة $m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{g}'+\vec{T}$

هذه المعادلة الأخيرة تبين أن كل شيء يجري و كأن داخل العربة تسود **جاذبية ظاهرية**

$$\boxed{\vec{g}'=\vec{g}-\vec{a}} \quad \vec{a}\perp\vec{g}\Rightarrow \boxed{g'=\sqrt{g^2+a^2}}$$

يمكننا الآن حساب زاوية انحراف النواس و هي نفسها بالنسبة للملاحظين:

$$\boxed{tg\alpha=\frac{F}{P}=\frac{a}{g}}$$

كما يمكننا حساب دور الاهتزازات الصغيرة السعة بالنسبة لمراقب المتحرك:

$$\boxed{\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\left(g^2+a^2\right)^{1/2}}}}$$

لو كانت العربة متوقفة لكان الدور أصغر:

$$\boxed{\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

مثال 6.5: يقف رجل فوق ميزان لوزن الأشخاص داخل مصعد في حالة سكون فيقرأ $650N$. كم يقرأ الرجل على الميزان حين ينطلق المصعد بتسارع $2ms^{-1}$: ا/ نحو الأعلى، ب/ نحو الأسفل ؟

الحل:

ا/ بالنسبة لملاحظ خارج المصعد فإن الرجل يزن $650N$ و كتلته $65kg$.

بالنسبة للرجل داخل المصعد فهو في حالة توازن و هو خاضع للقوى $\vec{R},\vec{P},\vec{F}_e$. ما يقرأه الرجل هو شدة رد فعل الميزان $\vec{R}$:

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_e=\vec{0}\Rightarrow R-P-F_e=0\Rightarrow R=P'=mg+ma$$

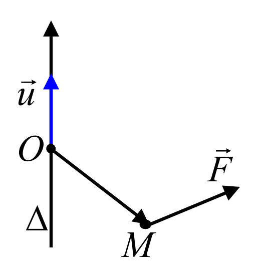
$$\boxed{P'=mg'=m(g+a)}=65(10+2) \qquad \boxed{P'=780N}$$

ب/ الحركة نحو الأسفل:

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_e=\vec{0}\Rightarrow -R+P-F_e=0\Rightarrow \boxed{R=P'=m(g-a)}$$

$$P'=65(10-2) \qquad \boxed{P'=520N}$$

11/ عزم قوة: (moment d'une force)



الشكل 11.5

❖ **تعريف:** ليكن المحور Δ ، شعاع وحدته $\vec{u}$ ، Δ و $\vec{u}$ لهما نفس الإتجاه ، و لتكن O نقطة من المحور :

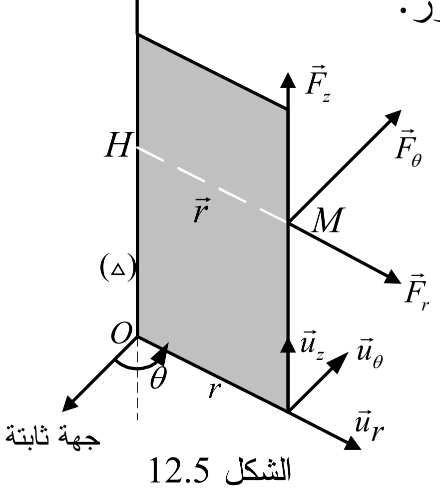
نسمي عزم قوة $\vec{F}$ المطبقة في النقطة M بالنسبة للمحور Δ المقدار السلمي:

$$\boxed{\tau_\Delta=\vec{\tau}_O.\vec{u}} \qquad (21.5)$$

حيث:

$$(22.5) \qquad \boxed{\vec{\tau}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}}$$ يمثل عزم القوة $\vec{F}$ في النقطة O.

نلاحظ أن عزم القوة (السلمي) τ_Δ هو مسقط عزم القوة (الشعاعي) $\vec{\tau}_O$ في نقطة من المحور ، و هي كمية مستقلة عن موضع O على المحور.



الشكل 12.5

❖ **عبارة عزم القوة بالنسبة للمحور Δ:**

(expression du moment d'une force)

يمثل الشكل12.5 بابا قابلا للدوران حول المحور $\Delta=Oz$ و خاضعا لقوة كيفية $\vec{F}$. نختار الإحداثيات الأسطوانية (r,θ,z) لها O كمبدأ و Δ كمحور Oz.

نحلل القوة $\vec{F}$ إلى ثلاث مركبات:

$$\vec{F}=\vec{F}_r+\vec{F}_\theta+\vec{F}_z\Rightarrow\vec{F}=F_r.\vec{u}_r+F_\theta.\vec{u}_\theta+F_z.\vec{u}_z$$

بما أن Oz هو المحور فإن $\vec{u}=\vec{u}_z$ و عليه: $\vec{\tau}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$; $\tau_\Delta=\tau_z=\vec{\tau}_O.\vec{u}_z$

$$\tau_\Delta=\tau_z=(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}).\vec{u}_z=(r.\vec{u}_r+z.\vec{u}_z)\wedge(F_r.\vec{u}_r+F_z.\vec{u}_z+F_\theta.\vec{u}_\theta).\vec{u}_z$$

لنقوم بهذه العملية الحسابية التي تشتمل على جداء شعاعي و جداء سلمي:

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r & 0 & z \\ F_r & F_\theta & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{u}_r(0 - z.F_\theta) - \vec{u}_\theta(r.F_z - z.F_r) + \vec{u}_z(r.F_\theta - 0)$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = -z.F_\theta.\vec{u}_r - r.F_z.\vec{u}_\theta + z.F_r\vec{u}_\theta. + r.F_\theta.\vec{u}_z$$

$$\tau_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}_z = -z.F_\theta.\underbrace{\vec{u}_r.\vec{u}_z}_{0} - r.F_z.\underbrace{\vec{u}_\theta.\vec{u}_z}_{0} + z.F_r.\underbrace{\vec{u}_\theta.\vec{u}_z}_{0} + r.F_\theta.\underbrace{\vec{u}_z.\vec{u}_z}_{1}$$

$$\boxed{\tau_\Delta = \tau_z = r.F_\theta} \qquad (23.5)$$

نلاحظ أن المركبتين القطرية $\vec{F}_r$ و المحورية $\vec{F}_z$ لا تساهمان في العزم بالنسبة لـــ Δ.

الخلاصة:

- القوة القطرية $\vec{F}_r$ التي تلاقي المحور Δ ليس لها أي فعل تدويري على الباب (هي تقتلعه).
- القوة المحورية $\vec{F}_z$ التي توازي المحور Δ ليس لها أي فعل تدويري على الباب (هي ترفعه).
- القوة العمودية $\vec{F}_\theta$ التي تتعامد مع المحور Δ هي وحدها لها فعل تدويري على الباب. كل ما كان الذراع كبيرا كل ما كان من السهل تدوير الباب.

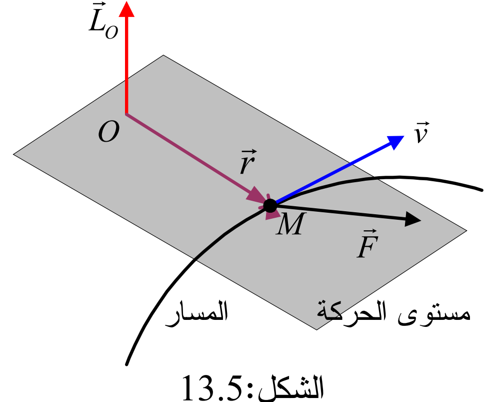
12/ العزم الحركي: (moment cinétique)

❖ **العزم الحركي لنقطة مادية في نقطة من الفضاء:**

لتكن O نقطة من الفضاء (ليس ضروريا أن تكون ساكنة في مرجع R):

نسمي العزم الحركي لنقطة مادية كتلتها m و كمية حركتها $\vec{p}$ و موجودة في النقطة M بالنسبة للنقطة O المقدار الشعاعي :

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}} \qquad (24.5)$$



الشكل:13.5

نظرا لتشابه هذه العبارة مع عبارة عزم القوة 22.5 يمكن القول أن العزم الحركي هو عزم كمية الحركة:

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \leftrightarrow \vec{\tau}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

❖ العزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة لمحور:

بالمقارنة مع تعريف عزم قوة بالنسبة لمحور يمكن استنتاج تعريف عزم حركة نقطة مادية بالنسبة لمحور Δ:

$$\boxed{L_{\Delta} = \vec{L}_O . \vec{u}} \qquad (25.5)$$

نلاحظ أن العزم الحركي (السلمي) L_{Δ} هو مسقط العزم الحركي (الشعاعي) $\vec{L}_O$ في نقطة من المحور ، و هي كمية مستقلة عن اختيار موضع O على المحور.

و بدون حسابات جديدة و استنادا فقط على المقارنة نتوصل إلى عبارة العزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة لمحور Oz بدلالة الإحداثية العرضية لكمية حركتها:

$$\boxed{L_{\Delta} = L_z = r.p_{\theta}} \qquad (26.5)$$

و انطلاقا من العبارتين العرضيتين لكمية الحركة و السرعة نصل إلى عبارة جديدة للعزم الحركي بدلالة الكتلة ، شعاع الموضع و السرعة الزاوية:

$$\left.\begin{array}{l} p_{\theta} = m.v_{\theta} \\ v_{\theta} = r.\dot{\theta} \\ L_{\Delta} = L_z = r.p_{\theta} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{L_{\Delta} = L_z = m.r^2.\dot{\theta}} \qquad (27.5)$$

ملاحظة: يمكن لهذه العبارة أن تبقى ثابتة ($\dot{\theta} = \omega \Rightarrow L_{\Delta} = m.r^2.\omega$)، نضع $C = r^2.\dot{\theta}$.

تحت تأثير قوى مركزية يمسح شعاع الموضع بين اللحظتين t_1 و t_2 المثلث OP_1P_2 الذي مساحته : $ds = \frac{1}{2} r^2.d\theta$ (الشكل:14.5).

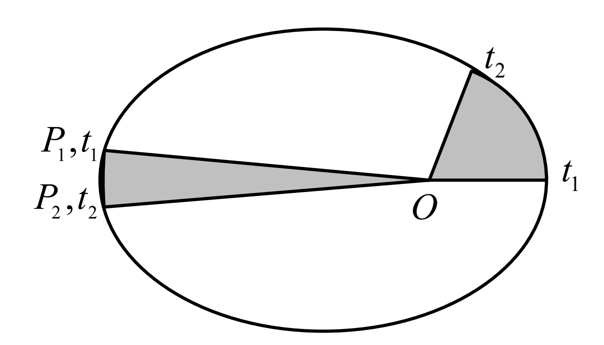
نقسم الطرفين على dt :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2.\dot{\theta} \qquad (28.5)$$

نلاحظ أن:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2.\dot{\theta} = \frac{1}{2} C = C^{te}$$

نتعرف على عبارة تسمى بقانون المساحات و الذي ينص على أن: "الحركة ذات القوة المركزية تخضع لقانون المساحات و الذي ينص على أن شعاع الموضع يمسح خلال مدد زمنية متساوية مساحات متساوية."(الشكل 14.5)



الشكل 14.5: تجسيد قانون المساحات
المساحات الملونتان متساويتان

و لا بأس أن نذكر هنا تعريف مقدار مرتبط بموضوع القوة المركزية و هو "**سرعة المسح**" (vitesse aréolaire):

"سرعة المسح $\frac{dS}{dt}$ هي المساحة التي يمسحها شعاع الموضع خلال واحدة الزمن"

❖ **نظرية العزم الحركي:**

في نقطة ثابتة O من مرجع غليلي ، المشتقة بالنسبة للزمن للعزم الحركي لنقطة مادية يساوي عزم القوة المطبقة عليه في هذه النقطة :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O} \qquad (29.5)$$

إن العزم يلعب بالنسبة للدوران دورا مماثلا لدور القوة بالنسبة للانسحابات ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$).

مثال 7.5:

تهتز نقطة مادية M كتلتها m حول محور أفقي OZ عمودي على المستوى الشاقولي (OX,OY) للحركة (الشكل 15.5). موضعها محدد في كل لحظة بإحداثياتها الديكارتية.

أحسب مباشرة:

1/ عزم الثقل $\vec{P}$ بالنسبة للنقطة O ثم بالنسبة للمحور OZ
بدلالة $x, g,$ و m ،

O X
M
Y $\vec{P}$

الشكل 15.5

2/ العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O ثم بالنسبة للمحور OZ بدلالة $m,x,y,\dot{x}$ و $\dot{y}$.

3/ جد معادلة الحركة بتطبيق نظرية العزم الحركي على النقطة M.

الإجابة:

1/ نحسب عزم القوى المطبقة على النقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right)\\ \vec{P}=\underbrace{\vec{P}_x}_{0}+\vec{P}_y=mg.\vec{j}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{\tau}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ 0 & mg & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{\tau}_O=mgx.\vec{k}}$$

أما بالنسبة للمحور $\Delta=OZ$:

$$\tau_\Delta=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right).\vec{k}\ ;\ \boxed{\tau_\Delta=mgx}$$

2/ نحسب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\\ \vec{p}=m\vec{v}_x+m\vec{v}_y\end{array}\right|\Rightarrow\vec{L}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{L}_O=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

أما بالنسبة للمحور $\Delta=OZ$:

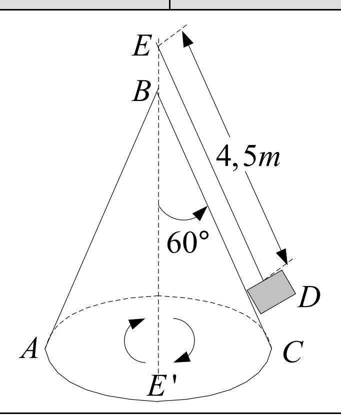
$$L_\Delta=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\right).\vec{k}\ ;\ \boxed{L_O=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)}$$

نطبق نظرية العزم الحركي:

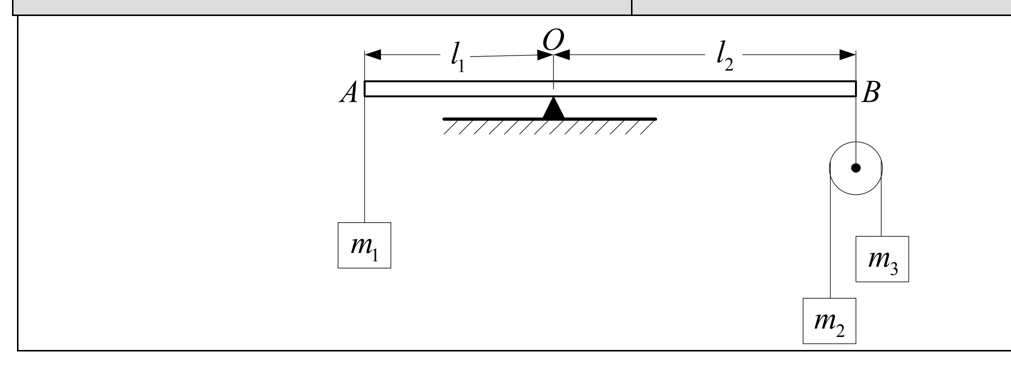
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{\tau}_0\ ;\ m\left(\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y}-y\ddot{x}\right)\vec{k}=mgx.\vec{k}\Rightarrow\boxed{x\ddot{y}-y\ddot{x}=gx}$$

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

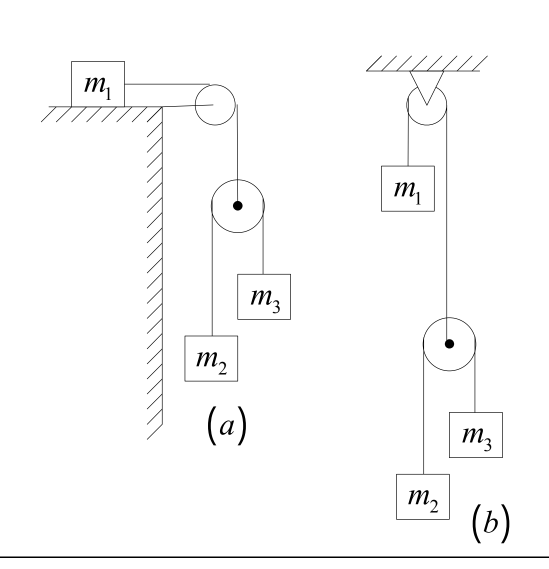
Exercice 5.1	**تمرين 1.5**
Un corps D de masse $5,5kg$ (figure ci-dessous) se déplace sans frottement sur la surface d'un cône ABC, en tournant autour de l'axe EE' avec une vitesse angulaire de $10 tours/mn$. Calculer : a/ la vitesse linéaire du corps, b/ la réaction de la surface sur le corps, c/ la tension du fil, d/ la vitesse angulaire nécessaire pour rendre nulle la réaction du plan. On prend $g = 9,8ms^{-1}$	ينتقل جسم D كتلته $5,5kg$ بدون احتكاك على سطح مخروط ABC (الشكل في الأسفل)، و ذلك بدورانه حول المحور EE' بسرعة زاوية $10 tours/mn$. أحسب: ا/ السرعة الخطية للجسم، ب/ رد فعل السطح على الجسم، ج/ توتر الخيط، د/ السرعة الزاوية اللازمة لكي ينعدم رد فعل المستوى. نأخذ $g = 9,8ms^{-1}$.



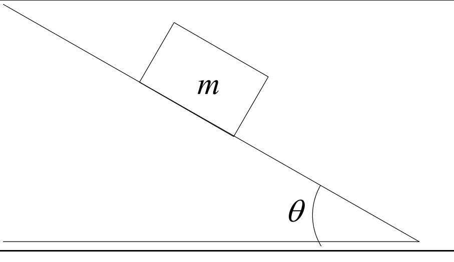
Exercice 5.2	**تمرين 2.5**
En considérant les forces de frottement comme négligeables ainsi que la masse de la poulie, 1/ montrer que la barre AB dans la figure ci-dessous sera en équilibre à condition que l'équation suivante soit vérifiée : $m_1(m_2+m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2$, 2/ trouver la force que le couteau exerce sur la barre.	باعتبار قوى الاحتكاك مهملة و كذا كتلة البكرة: 1/ برهن أن القضيب في الشكل أسفله يكون في توازن بشرط أن تتحقق المعادلة التالية: $m_1(m_2+m_3)l_1 = 4m_2m_3l_2$ 2/ أوجد القوة التي يطبقها السكين على القضيب.



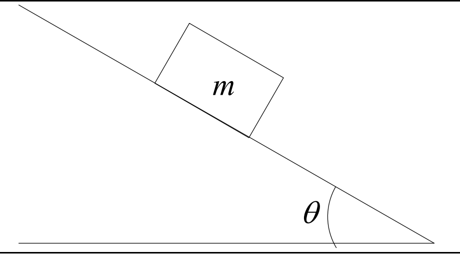
Exercice 5.3 Dans cet exercice on néglige les forces de frottement ainsi que les masses des poulies et celles des fils que nous considérons comme inextensibles. Trouver les accélérations des corps de la figure ci-dessous dans les deux cas (a) et (b).	**تمرين 3.5** في هذا التمرين نهمل قوى الاحتكاك و كذا كتل البكرتين و الخيوط التي نعتبرها غير قابلة للتمطيط. أوجد تسارعات أجسام الشكل أسفله في كل من الحالتين (a) و (b).



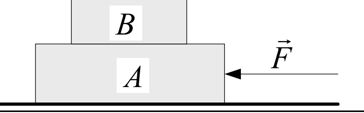
Exercice 5. 4 La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est $5N$ et qui repose sur un plan rugueux incliné de $\theta = 35°$. Le coefficient de frottement statique est 0.80. On prend $g = 10ms^{-2}$. a/ Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps décolle ? b/ Quelle est la force de frottement statique maximale? c/ Quelle est la force normale pour $35°$? d/ Quelle est la force de frottement statique pour une inclinaison de $35°$?	**تمرين 4.5** يبين الشكل جسما ثقله $5N$ موضوعا على مستوي خشن مائل بـــ $\theta = 35°$. معامل الاحتكاك السكوني هو 0.80. نأخذ $g = 10ms^{-2}$. ا/ ما هي زاوية الميل اللازمة لكي يقلع الجسم ؟ ب/ ما هي قوة الاحتكاك السكوني الأعظمية ؟ ج/ ما هي القوة الناظمية عند ميل $35°$ ؟ د/ ما هي قوة الاحتكاك السكوني عند الميل $35°$؟



Exercice 5.5	تمرين 5.5
La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est $8N$ et qui repose sur un plan rugueux incliné de $\theta = 35°$. Le coefficient de frottement cinétique est 0.40. On prend $g = 10ms^{-2}$. a/ Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps glisse avec une vitesse constante ? b/ Quelle set la force normale pour une inclinaison de $\theta = 35°$? c/ Quelle est la force de frottement pour $\theta = 35°$? d/ Quelle est l'accélération pour une inclinaison de $\theta = 35°$?	يبين الشكل جسما ثقله $8N$ موضوعا على مستوي خشن مائل ب $\theta = 35°$. معامل الاحتكاك الحركي هو 0.40. نأخذ $g = 10ms^{-2}$ ا/ ما هي زاوية الميل اللازمة لكي ينتقل الجسم بسرعة ثابتة ؟ ب/ ما هي القوة الناظمية عند ميل $\theta = 35°$ ؟ ج/ ما هي قوة الاحتكاك الحركي عند $\theta = 35°$ ؟ د/ ما هو التسارع عند ميل $\theta = 35°$؟

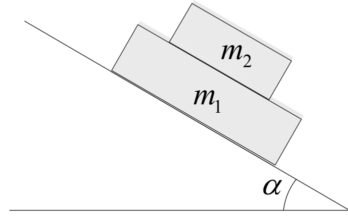


Exercice 5.6	تمرين 6.5
Un corps B de masse $3kg$ est placé sur un autre corps A de masse $5kg$ (figure ci-dessous). On suppose qu'il n'y a pas de frottement entre le corps A et la surface sur laquelle il repose Les coefficients de frottement statique et cinétique entre les deux corps sont respectivement $0,2$ et $0,1$. a/ Quelle force maximale peut-on appliquer à chaque corps pour faire glisser le système en maintenant ensemble les deux corps. b/ Quelle est l'accélération quand cette force maximale est appliquée ? c/ Quelle est l'accélération du corps B si la force est plus grande que la force maximum ci-dessus et est appliquée au corps A ? et appliquée au corps B ?	يوضع جسم B كتلته $3kg$ على جسم آخر A كتلته $5kg$ (الشكل في الأسفل). نفترض عدم وجود احتكاك بين الجسم A و السطح الذي يرتكز عليه. معاملا الاحتكاك السكوني و الحركي بين الجسمين هما على التوالي $0,2$ و $0,1$. ا/ ما هي القوة الأعظمية الممكن تطبيقها على كل جسم حتى تنزلق الجملة مع إبقاء الجسمين معا. ب/ ما هو التسارع حين تطبق هذه القوة الأعظمية؟ ج/ ما هو تسارع الجسم B إذا كانت قوة أكبر من القوة الأعظمية المذكورة أعلاه مطبقة على الجسم A ؟ مطبقة على الجسم B ؟

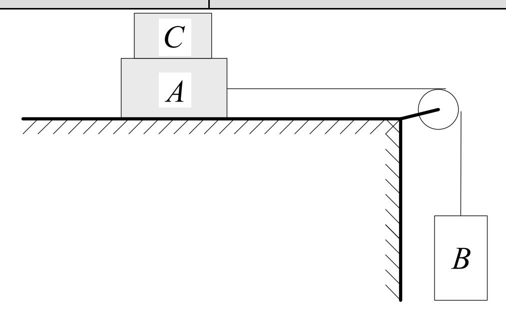


Exercice 5.7	تمرين 7.5
On pose une masse m_2 sur une masse m_1, puis on pose l'ensemble sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. Le coefficient de frottement cinétique entre m_1 et m_2 est h_1, et entre m_1 et la	وضعت كتلة m_2 فوق كتلة m_1، ثم وضعت الجملة على مستوى مائل بزاوية α مع الأفق. معامل الإحتكاك الحركي بين m_1 و m_2 هو h_1، و بين m_1 و السطح المائل

surface inclinée il est h_2 . Calculer les accélérations des deux masses. Application numérique : $h_1 = 2h_2 = 0,3$, $m_2 = 8kg$, $m_1 = 5kg$, $\alpha = 60°$, $g = 9,8ms^{-2}$	هو h_2 . أحسب تسارع كل من الكتلتين. تطبيق عددي: $h_1 = 2h_2 = 0,3$, $m_2 = 8kg$, $m_1 = 5kg$, $\alpha = 60°$, $g = 9,8ms^{-2}$



Exercice 5.8 Les masses des corps A et B sur la figure ci-dessous sont respectivement $10kg$ et $5kg$. Le coefficient de frottement de A avec la table est $0,20$. La masse de la poulie est négligeable. Le fil est inextensible et de masse négligeable. Trouver la masse minimale de C qui empêche A de bouger. Calculer l'accélération du système si on soulève C .	**تمرين 8.5** كتلتا الجسمين A و B على الشكل أسفله هما على التوالي $10kg$ و $5kg$. معامل الاحتكاك لـ A مع الطاولة هو $0,20$. نهمل كتلة البكرة كما نفترض الخيط مهمل الكتلة و عديم الإمتطاط. أوجد الكتلة الأصغرية لـ C التي تمنع A من التحرك. أحسب تسارع الجملة إذا رفعنا C .



Exercice 5.9 Un point matériel de masse m est lancé avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle θ avec l'horizontale. Il est soumis au champ de gravitation terrestre. **I. Le tir a lieu dans le vide :** 1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamental de la dynamique. Calculer alors l'accélération $\vec{a}(t)$. Calculer : 2. la vitesse $\vec{v}(t)$. 3. la position $\overrightarrow{OM}(t)$. 4. la distance OA . 5. l'altitude maximale z_{max} atteinte par ce projectile. **II. Le tir a lieu dans l'air :** Le point matériel est soumis à un frottement	**تمرين 9.5** تقذف نقطة مادية كتلتها m بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ تصنع الزاوية θ مع الأفق و تخضع لحقل الجاذبية الأرضية. **I/ يتم الرمي في الفراغ:** 1/ إعزل النقطة المادية و طبق عليها المبدإ الأساسي للتحريك. إحسب حينئذ التسارع $\vec{a}(t)$. أحسب: 2/ السرعة $\vec{v}(t)$. 3/ الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$. 4/ المسافة $OA = x_{max}$. 5/ الارتفاع الأعظمي z_{max} الذي تبلغه القذيفة. **II/ الرمي في الهواء:** تخضع النقطة المادية لاحتكاك لزج من النوع $\vec{f} = -k.\vec{v}$.

visqueux du type $\vec{f} = -k.\vec{v}$:

1. Isoler le point matériel et lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

2. En remplaçant $\vec{a}$ par $\frac{d\vec{v}}{dt}$, montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}.$$

3. En déduire l'expression vectorielle de la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$. Montrer que celle-ci tend vers une valeur limite $\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}$.

4. En déduire la position $\overrightarrow{OM}(t)$. Ecrire les expressions des composantes de ce vecteur.

5. Calculer l'instant t_s pour lequel le projectile atteint le sommet S de la trajectoire et en déduire les coordonnées x_s et z_s correspondants.

6/ Démontrer que la trajectoire a une asymptote lorsque $t \to \infty$.

III. Synthèse graphique :

Tracer qualitativement sur un même graphique la trajectoire dans les deux cas suivants :

1. le tir a lieu dans le vide (pas de frottement).
2. le tir a lieu dans l'air (frottement visqueux).

1/ إعزل النقطة المادية و طبق عليها المبدإ الأساسي للتحريك.

2/ بتعويض $\vec{a}$ بـــ $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ، بيّن أننا نحصل على المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$

3/ إستنتج العبارة الشعاعية للسرعة اللحظية $\vec{v}(t)$.

بيّن أن هذه الأخيرة تؤول إلى قيمة حدية $\vec{v}_L = \vec{g}\frac{m}{k}$.

4/ إستنتج الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$. أكتب عبارتي مركبتي هذا الشعاع.

5/ أحسب اللحظة t_s التي تبلغ فيها القذيفة الذروة S لمسارها و استنتج الإحداثيتين المناسبتين x_s و z_s.

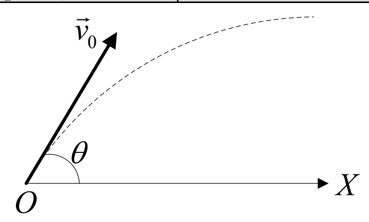
6/ برهن أن المسار يقبل خطا مقاربا عندما $t \to \infty$.

III/ خلاصة بيانية:

أرسم الشكل العام للمسار على نفس البيان في الحالتين:

1/ يتم الرمي في الفراغ(عدم وجود احتكاك).

2/ يتم الرمي في الهواء(وجود احتكاك لزج).



Exercice 5.10

Une demi sphère de rayon $R = 2m$ et de centre O repose sur un plan horizontal. Une particule de masse m, partant du repos du point M_0 situé en haut de la demi sphère, glisse sous l'action de son poids.

1/ Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la particule au cours de son glissement, sachant que le coefficient de glissement sur la surface de la sphère est μ.

2/ **En négligeant les frottements :**

a/ Démontrer que la vitesse acquise au point M défini par l'angle $\theta = \widehat{MOM_0}$ est donnée par l'expression $v = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$,

b/ en déduire alors l'angle θ_0 sous lequel la particule quitte la surface de la sphère, discuter le résultat,

c/ calculer la vitesse v_0 correspondante.

3/ Au moment où la particule quitte le point M avec

تمرين 10.5

توضع كرة نصف قطرها $R = 2m$ و مركزها O على مستوى أفقي. تنزلق جسيمة كتلتها m من السكون تحت تأثير ثقلها من النقطة M_0 الواقعة في أعلى نصف الكرة.

1/ اكتب المعادلة التفاضلية لحركة هذه الجسيمة أثناء انزلاقها علما أن معامل الاحتكاك الإنزلاقي على سطح الكرة هو μ.

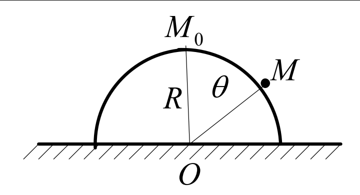
2/ **بإهمال الاحتكاك:**

ا/ بين أن السرعة المكتسبة عند النقطة M المعرفة بالزاوية $\theta = \widehat{MOM_0}$ تعطى بالعلاقة $v = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$،

ب/ إستنتج عندئذ مقدار الزاوية θ_0 التي من أجلها تغادر الجسيمة سطح الكرة، ناقش النتيجة،

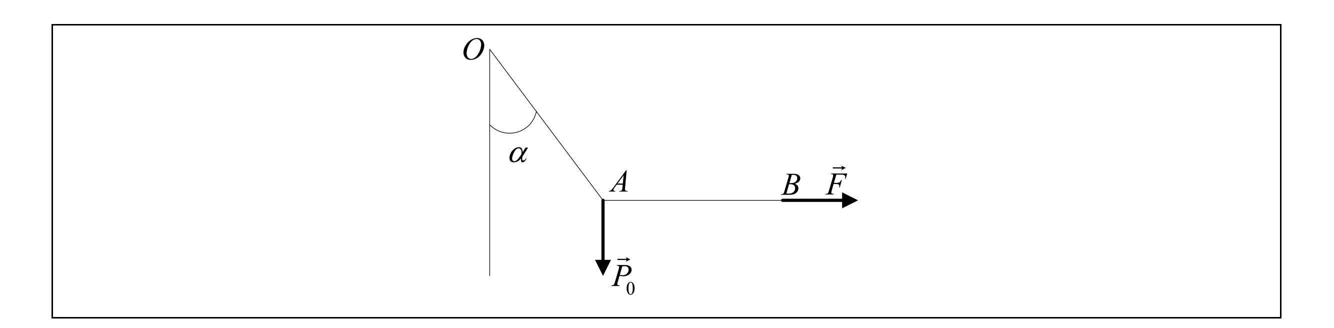
ج/ أحسب السرعة v_0 الموافقة.

la vitesse v_0 , on demande : a/ trouver la vitesse v instantanée en fonction de g, R, v_0, θ_0, t , b/ les modules des forces tangentielle et normale.	3/ عند مغادرة الجسيمة النقطة M بالسرعة v_0 يطلب: ا/ إيجاد السرعة v اللحظية للحركة بدلالة g, R, v_0, θ_0, t ، ب/ شدتي القوة المماسية و القوة الناظمية.



Exercice 5.11 La fusée « Apollo » effectue un voyage de la terre à la lune. La lune est la distance $3.84\times10^{8}\,m$ de la terre. La masse de la terre est $5.98\times10^{24}\,kg$ tandis que celle de l a lune vaut $7.36\times10^{22}\,kg$. a/ Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la terre lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ? b/ Quelle est l'intensité du champ de pesanteur de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ? d/ Quelle est l'intensité du champ résultant du champ de pesanteur de la terre et celui de la lune lorsque la fusée se trouve à mi-chemin entre la terre et la lune ? e/ A quelle distance du centre de la terre le champ résultant des deux champs terrestre et lunaire s'annule-t-il ?	**تمرين 11.5** الصاروخ " أبولو" يقوم برحلة من الأرض إلى القمر. يبعد القمر عن الأرض بمسافة $3.84\times10^{8}\,m$. كتلة الأرض $5.98\times10^{24}\,kg$ بينما كتلة القمر $7.36\times10^{22}\,kg$. ا/ ما هي شدة حقل الجاذبية الأرضية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟ ب/ ما هي شدة حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟ ج/ ما هي شدة الحقل الناتج عن حقل الجاذبية الأرضية و حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر ؟ د/ على أي بعد من مركز الأرض ينعدم الحقل الناتج عن جاذبيتي الأرض و القمر ؟

Exercice 5.12 On dispose de deux ressorts linéaires identiques de longueur au repos l . Chacun, soumis à un poids $\vec{P}_0$, prend un allongement l_0, déterminé par leur raideur commune k . On suspend un poids P_0 à l'un des ressorts et on tire horizontalement le poids à l'aide de l'autre ressort que l'on tire avec une force variable $\vec{F}$. Le premier fait alors un angle α avec la verticale. Pour chaque valeur de α correspondant à une force $\vec{F}$, le ressort (1) prend un allongement l_1 et le ressort (2) un allongement l_2. Calculer les allongements l_1 et l_2 en fonction de α et l_0 .	**تمرين 12.5** نتوفر على نابضين خطيين متماثلين طول كل منهما l في حالة سكون. حين يخضع كل منهما لثقل $\vec{P}_0$ يأخذ استطالة l_0، محددة بثابت مرونتهما المشتركة k. نعلق ثقلا P_0 إلى أحد النابضين و نسحب أفقيا الثقل بواسطة النابض الآخر الذي نجذبه بقوة متغيرة $\vec{F}$. يصنع الأول زاوية α مع الشاقول. من أجل كل قيمة لـــ α مناسبة للقوة $\vec{F}$ ، يستطيل النابض (1) بـــ l_1 و النابض (2) الثاني بـــ l_2. أحسب الإستطالتين l_1 و l_2 بدلالة α و l_0.



Exercice 5.13

On donne le vecteur position $\vec{}$ d'un corps de masse $6kg$: $\vec{r} = \vec{i}.(3t^2 - 6t) + \vec{j}.(-4t^3) + \vec{k}.(3t+2)\,m$.

Trouver :

a/ la force $\vec{F}$ agissant sur le corps,

b/ son moment $\vec{L}$ par rapport à l'origine,

c/ la quantité de mouvement $\vec{p}$ du corps et son moment cinétique par rapport à l'origine,

d/ vérifier que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ et que $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

تمرين 13.5

يعطى شعاع الموضع لجسم كتلته $6kg$:

$$\vec{r} = \vec{i}.(3t^2 - 6t) + \vec{j}.(-4t^3) + \vec{k}.(3t+2)\,m$$

أوجد:

ا/ القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم،

ب/ عزمه $\vec{L}$ بالنسبة للمبدإ،

ج/ كمية الحركة $\vec{p}$ للجسم و عزمه الحركي بالنسبة للمبدإ،

د/ تأكد أن $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ و أن $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

Exercice 5.14

Un pendule est constitué d'une masse m accrochée au point M à un fil de masse négligeable et de longueur l. Le fil est repéré par rapport à la verticale par l'angle orienté θ. Le mouvement s'effectue sans frottement.

1/ Exprimer dans la base $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ la vitesse de M par rapport au référentiel R.

2/ Etablir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique dans chacune des deux bases $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ et $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Démontrer qu'elles sont équivalentes Retrouver cette même équation en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

3/ En considérant des oscillations d'amplitude θ_0, trouver l'expression de la tension du fil lors du passage du pendule par sa position d'équilibre. Quelle est donc la condition sur la tension du fil pour que celui-ci ne casse pas ?

تمرين 14.5

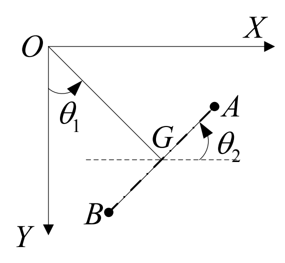
يتكون نواس من كتلة m مثبتة في النقطة M لخيط كتلته مهملة و طوله l. موضع الخيط معين بالنسبة للشاقول بالزاوية الموجهة θ. تتم الحركة بدون احتكاك.

1/ عبر في القاعدة $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$، عن سرعة M بالنسبة للمرجع R.

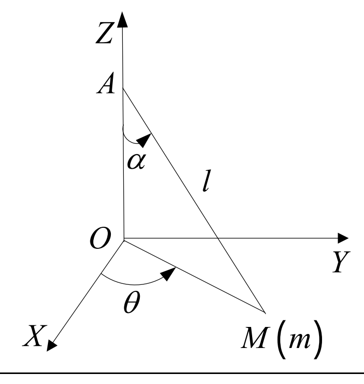
2/ ضع معادلة الحركة باستعمال نظرية العزم الحركي في كل من القاعدتين $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ و $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. برهن أن المعادلتين متكافئتان. أوجد من جديد المعادلة نفسها بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك.

3/ باعتبار الاهتزازات ذات السعة الصغيرة جدا θ_0، جد عبارة توتر الخيط عند مرور النواس من موضع التوازن بدلالة m,g,l و θ_0. ما هو إذن الشرط في توتر الخيط حتى لا ينقطع؟

Exercice 5.15 Deux boules identiques, assimilables à deux points matériels de masse m, sont fixées aux deux extrémités d'une barre AB de masse négligeable et de longueur $2d$. Cette barre, astreinte à rester dans le plan (OX,OY), est articulée en G à une tige OG de masse négligeable et de longueur a. Le mouvement est repéré par les angles θ_1 et θ_2 (voir figure). Calculer directement le moment cinétique $\vec{L}_O$ du système par rapport au point O en fonction de m,a,l,θ_1 et θ_2.	**تمرين 15.5** تثبت كرتان متماثلتان، نفترضهما نقطيتين ماديتين ذات كتلة m، في نهاتي قضيب AB كتلته مهملة و طوله $2d$. هذا القضيب المجبر على البقاء في المستوى (OX,OY)، متمفصل في G مع ساق كتلتها مهملة و طولها a. تعين الحركة بالزاويتين θ_1 و θ_2 (أنظر الشكل). أحسب مباشرة العزم الحركي $\vec{L}_O$ للجملة بالنسبة للنقطة O بدلالة m,a,l,θ_1 و θ_2.

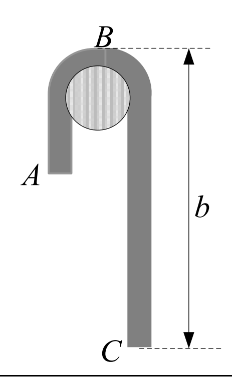


Exercice 5.16 Un point matériel M, de masse m, lié par un fil inextensible de longueur l à un point fixe A, tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe AZ. 1. α étant l'angle que forme AM avec la verticale, calculer la tension T du fil puis l'angle α en fonction de m,g,l et ω. 2. Calculer en coordonnées cylindriques d'origine O l'expression du moment cinétique de M par rapport à A. Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces appliquées à M.	**تمرين 16.5** تدور نقطة مادية M كتلتها m، موصلة بخيط غير قابل للتمدد طوله l إلى نقطة ثابتة A، حول المحور AZ بسرعة زاوية ثابتة ω. 1/ إذا كانت α هي الزاوية التي تصنعها AM مع الشاقول، أحسب التوتر T للخيط ثم الزاوية α بدلالة m,g,l و ω. 2/ أحسب بالإحداثيات الأسطوانية ذات المبدإ O عبارة العزم الحركي لـــ M بالنسبة لـــ A. تأكد أن مشتقته بالنسبة للزمن تساوي عزم محصلة القوى المطبقة على A بالنسبة لـــ M.



Exercice 5.17 Un pendule simple est suspendu au toit du wagon d'un train qui roule en ligne droite sur un terrain plat à une vitesse de $120 km.h^{-1}$. Un passager s'aperçoit que le pendule dévie subitement vers la droite, faisant un angle $\alpha = 10°$ avec la verticale ; il conserve cette position pendant 30 secondes, puis revient à la verticale. 1/ Comment interprétez-vous la déviation du pendule ? 2/ Calculer le rayon de courbure. 3/ De quel angle le train a-t-il tourné ? On prend $g = 9.8 m.s^{-2}$.	**تمرين 17.5:** نواس بسيط معلق إلى سقف عربة قطار يسير على خط مستقيم فوق أرضية مستوية بسرعة $120 km.h^{-1}$. يلاحظ مسافر أن النواس ينحرف فجأة نحو اليمين، صانعا زاوية $\alpha = 10°$ مع الشاقول؛ يحافظ على هدا الوضع مدة 30 ثانية، ثم يود إلى الشاقول. 1/ كيف تفسر انحراف النواس عن الشاقول؟ 2/ أحسب نصف قطر الانحناء. 3/ ما هي الزاوية التي استدار بها القطار؟ نأخذ $g = 9.8 m.s^{-2}$.

Exercice 5.18 Une corde de masse M uniformément répartie sur sa longueur L (figure ci-dessous) peut glisser sans frottement sur la gorge d'une poulie bloquée de très petit rayon. Quand le mouvement commence $BC = b$. Montrer que lorsque $BC = \frac{2}{3}L$, l'accélération est $a = \frac{g}{3}$ et la vitesse $v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(bL - b^2 - \frac{2}{9}L\right)}$. Application numérique : $L = 12m$ et $b == 7m$	**تمرين 18.5** حبل كتلته M موزعة بانتظام على طوله L (الشكل في الأسفل) يمكنه الانزلاق بدون احتكاك على محزّ بكرة غير قابلة للدوران ذات نصف قطر صغير جدا. عندما تبدأ الحركة تكون $BC = b$. برهن أنه لما $BC = \frac{2}{3}L$ ، فإن التسارع هو $a = \frac{g}{3}$ و عبارة السرعة هي: $v = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(bL - b^2 - \frac{2}{9}L\right)}$. تطبيق عددي: $L = 12m$ و $b == 7m$.



Exercice 5.19

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur la surface intérieure d'un cône de révolution d'axe (Oz), de sommet O et de demi angle au sommet α .

A l'instant t , M_0 a pour coordonnées cylindriques (r_0, θ_0, z_0). Dans la région considérée, l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ sera considérée comme uniforme. Le référentiel $\mathbb{R}(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est galiléen.

1/ Montrer que la côte du point M , notée z , est donnée par : $z = r\dfrac{z_0}{r_0}$.

2/ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathbb{R}$ et la projeter sur la base locale des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Ecrire le système des trois équations différentielles obtenues.

3/ Déduire la relation $\dot{\theta} = f(r_0, v_0, r)$ de l'expression de la composante orthoradiale de l'accélération du point M .

4/ Mettre l'équation différentielle d'intégrale $r(t)$ sous la forme :

$$\ddot{r} + \frac{A(r_0, v_0, z_0)}{r^3} = B(r_0, z_0, g)$$

5/ Pour quelle vitesse initiale $v_1 = f(z_0, g)$ le point M a-t-il un mouvement circulaire uniforme de rayon $_0$ sur le cône, autour de l'axe (Oz) ?

6/ Multiplier par $2\,\dot{}$ les deux membres de l'équation différentielle de solution $r(t)$ et l'intégrer une fois par rapport au temps t. Présenter l'équation différentielle obtenue sous la forme : $\dot{r}^2 = f(r_0, v_0, z_0, r, g)$.

تمرين 19.5

تنتقل نقطة مادية M كتلتها m بدون احتكاك على السطح الداخلي لمخروط دوران محوره (Oz) قمته O و نصف زاويته الرأسية α.

في اللحظة t، تكون لـــ M_0 الإحداثيات الأسطوانية (r_0, θ_0, z_0). يعتبر تسارع الجاذبية الأرضية $\vec{g}$ منتظما في المنطقة المعينة. المرجع $\mathbb{R}(0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ غليلي.

1/ برهن أن علو النقطة M، المرموز له بـــ z، معطى بـــ $z = r\dfrac{z_0}{r_0}$.

2/ طبق العلاقة الأساسية للتحريك في $\mathbb{R}$ ثم أسقطها على القاعدة المحلية للإحداثيات الأسطوانية $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. أكتب جملة المعادلات التفاضلية الثلاثة المتحصل عليها.

3/ إستنتج العلاقة $\dot{\theta} = f(r_0, v_0, r)$ لعبارة المركبة العرضية لتسارع النقطة M.

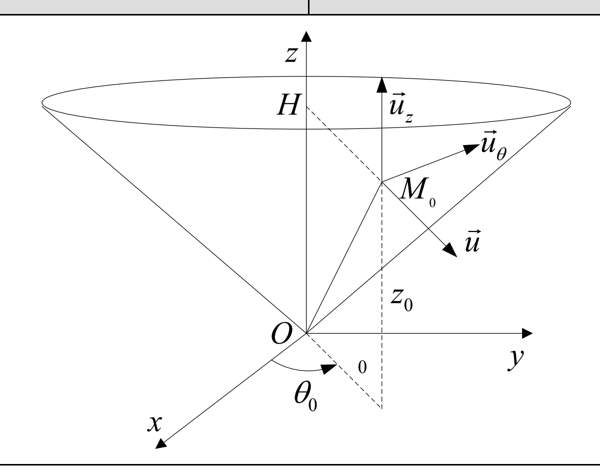
4/ ضع المعادلة التفاضلية لتكامل $r(t)$ على الشكل:

$$\ddot{r} + \frac{A(r_0, v_0, z_0)}{r^3} = B(r_0, z_0, g)$$

5/ من اجل أي قيمة للسرعة الإبتدائية $v_1 = f(z_0, g)$ يكون للنقطة M حركة دائرية منتظمة نصف قطرها $_0$ على المخروط، حول المحور (Oz)؟

6/ إضرب في $2\,\dot{}$ طرفي المعادلة التفاضلية ذات الحل $r(t)$ و كاملها مرة واحدة بالنسبة للزمن t. أكتب المعادلة التفاضلية المحصل عليها على الشكل:

$$\dot{r}^2 = f(r_0, v_0, z_0, r, g)$$



Exercice 5.20

Une particule de charge q et de masse m, se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ électromagnétique ((le champ électrique étant $E\vec{k}$ et le champ magnétique $B\vec{i}$) subit une force de la forme : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$.

On suppose $\vec{E}$ et $\vec{B}$ constants en module et sens.

Montrer dans ce cas que la particule se déplace dans le plan yOz selon une trajectoire en forme de cycloïde d'équations :

$$y(t) = a(\theta - \sin\theta) \text{ et } z(t) = a(1 - \cos\theta).$$

Avec $a = \frac{m}{q}$ et $\theta = \frac{qB}{m}$. La vitesse initiale est nulle.

تمرين 20.5

تتحرك جسيمة شحنتها q و كتلتها m بسرعة $\vec{v}$ في مجال كهرومغناطيسي(المجال الكهربائي هو $E\vec{k}$ و المجال المغناطيسي هو $B\vec{i}$) فتتأثر بقوة من الشكل:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

نفترض $\vec{E}$ و $\vec{B}$ ثابتي الشدة و الاتجاه.

تأكد أن في هذه الحالة تتحرك الجسيمة في المستوى yOz وفق مسار دويري معادلتاه:

$y(t) = a(\theta - \sin\theta)$ و $z(t) = a(1 - \cos\theta)$.

مع $a = \frac{m}{q}$ و $\theta = \frac{qB}{m}$. السرعة الابتدائية معدومة.

Corrigés des exercices de 5.1 à 5.20 حلول التمارين من 1.5 إلى 20.5

التمرين 1.5:

ا/ حركة الجسم دائرية و عليه فإن السرعة الخطية للجسم هي: $\boxed{v = \omega r}$

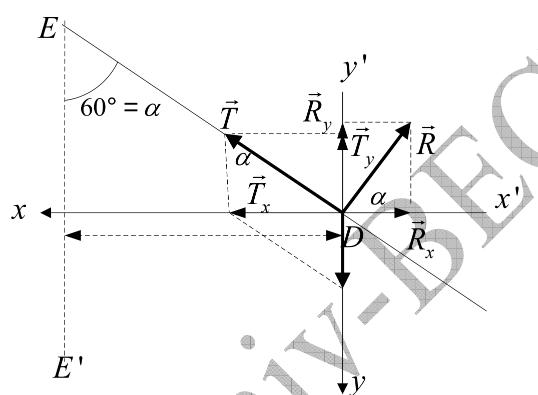
نحول السرعة الزاوية إلى جملة الوحدات الدولية: $\omega = \dfrac{10.6,28}{60} \simeq 1,05 rad.s^{-1}$

نحسب نصف قطر الحركة الدائرية التي يقوم بها الجسم حول المحور EE' :

$$r = l.\sin 60° \quad , \quad r = 4,5.0,87 \Rightarrow r = 3,9m$$

و منه: $v = 1,05.3,9 \Rightarrow \boxed{v \simeq 4,1 ms^{-1}}$

ب/ حساب شدة قوة رد فعل السطح على الجسم: الجسم يقوم بحركة دائرية منتظمة تحت تأثير قوى محصلتها قوة مركزية شدتها $m\omega^2$. نسقط القوى على المحورين(أنظر الشكل).



$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\omega^2 r.\vec{i}$$

$$T.\sin\alpha - R.\cos\alpha = m\omega^2 r \rightarrow (1)$$

$$P - R.\sin\alpha - T.\cos\alpha = 0 \rightarrow (2)$$

نحذف التوتر ما بين المعادلتين (1) و (2):

$$\frac{T.\sin\alpha}{T.\cos\alpha} = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{P - R.\sin\alpha}$$

$$\boxed{R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right)} \rightarrow (3) \quad ; \quad \boxed{R \simeq 37N}$$

ج/ توتر الخيط نستنتجه من المعادلة (1) أو (2):

$$T = \frac{R.\cos\alpha + m\omega^2 r}{\sin\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 46,4N}$$

$$T = \frac{P - R.\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \boxed{T \simeq 43.42N}$$

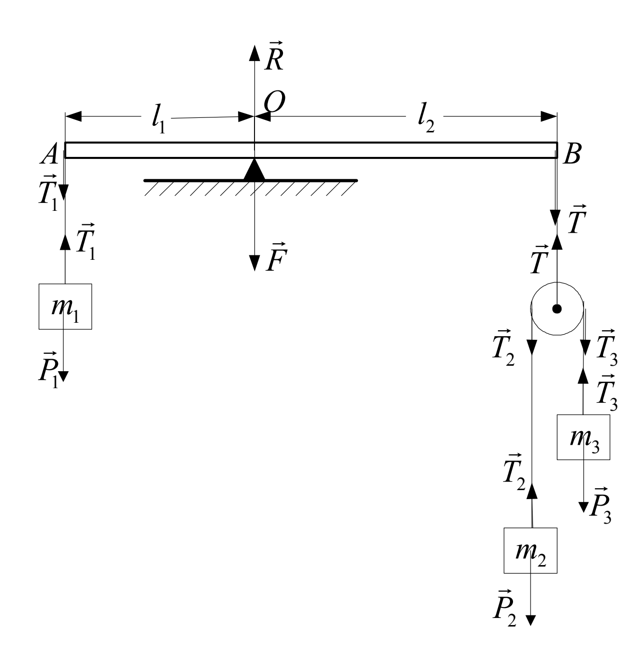
الفرق بين القيمتين ناتج عن القيم التقريبية التي نأخذها.

د/ السرعة الزاوية اللازمة لكي ينعدم رد فعل المستوى على الجسم نستنتجه من المعادلة (3):

$$R = m\left(g.\sin\alpha - \omega^2.r.\cos\alpha\right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g.\sin\alpha}{r.\cos\alpha} = \frac{g.\sin\alpha}{l.\sin\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}} \ , \ \boxed{\omega \simeq 2,1 rad.s^{-1}}$$

التمرين 2.5:



1/ نمثل كل القوى المأثرة على الجملة. توازن الجملة محقق إذا كان المجموع الجبري لعزوم القوى المطبقة على القضيب بالنسبة للمحور(السكين) معدوما أي : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta}$

علينا أن نحسب شدة التوتر $\vec{T}$. من أجل هذا نحسب أولا تسارع الكتلتين m_2 و m_3 بالنسبة للبكرة التي تدور بدون انسحاب بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك:

$$\left.\begin{aligned} P_3 - T_3 &= m_3.a \\ -P_2 + T_2 &= m_2.a \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g}$$

و منه:

$$\left.\begin{aligned} &P_3 - T_3 = m_3.a \Rightarrow T_3 = m_3(g - a) \\ &-P_2 + T_2 = m_2.a \Rightarrow T_2 = m_2(g + a) \\ &a = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} g \\ &T = T_2 + T_3 \ \ , \ T = m_2(g + a) + m_3(g - a) \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{T = 4g \frac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}}$$

بالنسبة لـــ m_1 : $P_1 = T_1$

حسب نظرية العزوم : $\tau_{\vec{T}/\Delta} = \tau_{\vec{T}_1/\Delta} \Rightarrow T_1.l_1 = T.l_2$

و في الأخير : $m_1 g.l_1 = 4g \frac{m_2.m_3}{m_2 + m_3}.l_2 \Rightarrow \boxed{m_1(m_2 + m_3).l_1 = 4m_2 m_3.l_2}$

2/ القوة التي يطبقها السكين على القضيب تساوي محصلة القوتين المتوازيتين $\vec{T}$ و $\vec{T}_1$:

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T} \Rightarrow \boxed{R = g\left(m_1 + \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}\right)}$$

التمرين 3.5

الحالة الأولى:(أنظر الشكل أسفله)

نحن أمام تمرين للتحريك مقرون بالحركة النسبية.

نبدأ بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك على كل من m_1، m_2 و m_3:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ &\vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3.\vec{a}_3 \\ &\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \\ &\vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \frac{1}{2}\vec{T}_1 \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} &\vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ &2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2m_3.\vec{a}_3 \\ &2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2m_2.\vec{a}_2 \end{aligned}\right.$$

نعلم في الحركة النسبية الانسحابية(بدون دوران) أن: $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. تسارع الجر يساوي تسارع البكرة المتحركة أي تسارع الكتلة m_1 $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$. أما التسارع النسبي للكتلتين m_2 و m_3 فهو مشترك و ليكن $\vec{a}$.

حسب الاتجاه الموضح على الشكل:

بالنسبة للكتلة m_2 فإن تسارعها المطلق هو: $a_2 = a_r - a_1$

بالنسبة للكتلة m_3 فإن تسارعها المطلق هو: $a_3 = a_r + a_1$

بالإسقاط يمكننا الآن كتابة:

$$\begin{cases} T_1 = ma_1 \rightarrow (1) \\ T_1 - 2P_2 = 2m_2\left(a_r - a_1\right) \rightarrow (2) \\ -T_1 + 2P_3 = 2m_3\left(a_r + a_1\right) \rightarrow (3) \end{cases}$$

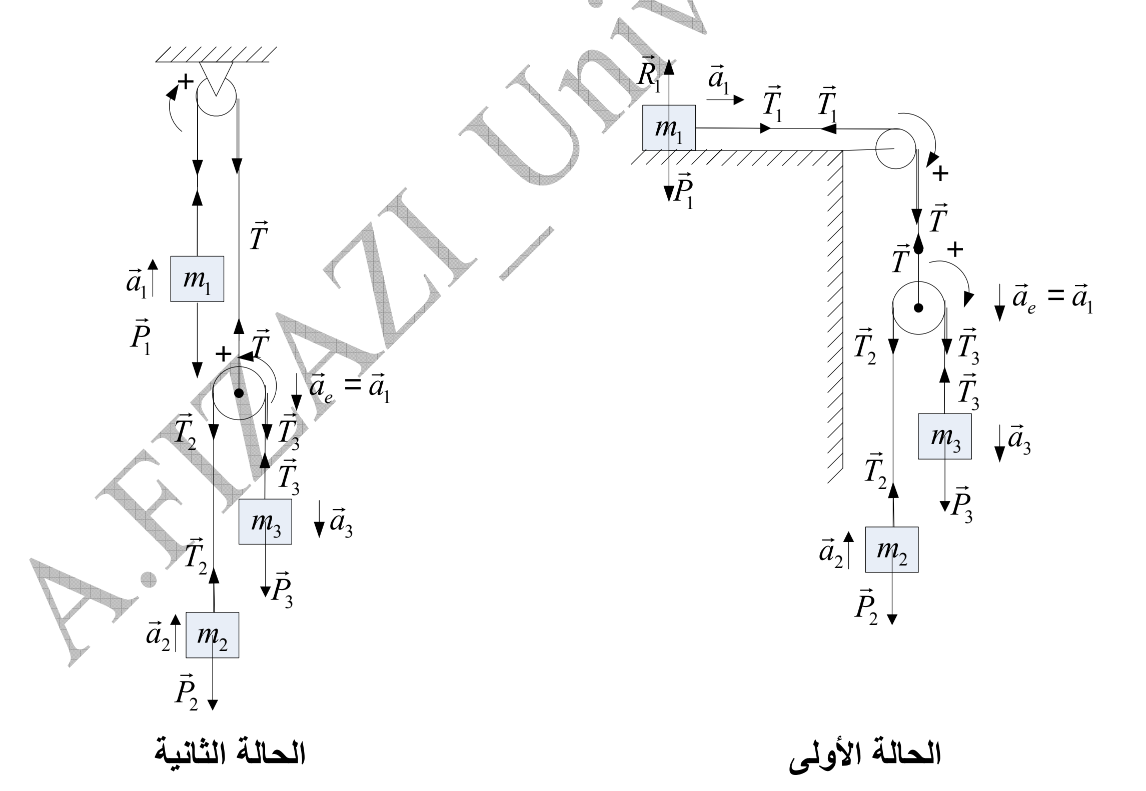
تكونت لدينا جملة معادلات ذات ثلاث مجاهيل.

نستخرج التسارع النسبي المشترك من العادلة (3):

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3 g - 2m_3 a_1 - m_1 a_1}{2m_3} g} \rightarrow (4)$$

نعوض a بقيمتها في المعادلة (2) لنجد عبارة التسارع a_1 للكتلة m_1:

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g} \rightarrow (5)$$



الحالة الثانية الحالة الأولى

نعود إلى عبارة التسارع النسبي (4) و نعوض التسارع المطلق بقيمته التي وجدناها في المعادلة (5):

$$\boxed{a_r = \frac{m_3 m_1 - m_1 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g} \rightarrow (6)$$

بات الآن من السهل استنتاج التسارعين المتبقيين a_2 و a_3 .

عبارة التسارع a_2 للكتلة m_2 :

$$a_2 = a_r - a_1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g - \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

عبارة التسارع a_3 للكتلة m_3 :

$$a_3 = a_r + a_1 \;\; ; \;\; a_3 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g + \frac{4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g$$

$$\boxed{a_3 = \frac{m_3m_1 - m_1m_2 + 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g}$$

<u>الحالة الثاني:</u>(أنظر الشكل أعلاه)

نبدأ بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك على كل من m_1 ، m_2 و m_3 :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3.\vec{a}_3 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2.\vec{a}_2 \\ \vec{T}_2 = \vec{T}_3 = \frac{1}{2}\vec{T}_1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ 2\vec{P}_3 + \vec{T}_1 = 2m_3.\vec{a}_3 \\ 2\vec{P}_2 + \vec{T}_1 = 2m_2.\vec{a}_2 \end{array}\right.$$

كما أشرنا إليه في الحالة الأولى فإن $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. تسارع الجر يساوي تسارع البكرة المتحركة أي تسارع الكتلة m_1 $(\vec{a}_e = \vec{a}_1)$. أما التسارع النسبي للكتلتين m_2 و m_3 فهو مشترك و ليكن $\vec{a}$.

حسب الاتجاه الموضح على الشكل:

بالنسبة للكتلة m_2 فإن تسارعها المطلق هو: $a_2 = a_r - a_1$

بالنسبة للكتلة m_3 فإن تسارعها المطلق هو: $a_3 = a_r + a_1$

بالإسقاط يمكننا الآن كتابة:

$$\begin{cases} T_1 = ma_1 \rightarrow (8) \\ T_1 - 2P_2 = 2m_2(a_r - a_1) \rightarrow (9) \\ -T_1 + 2P_3 = 2m_3(a_r + a_1) \rightarrow (10) \end{cases}$$

تكونت لدينا جملة معادلات ذات ثلاث مجاهيل.

نستخرج التسارع النسبي المشترك من العادلة(9) :

$$\boxed{a_r = \frac{(m_1 - 2m_2)g - (m_1 + 2m_2)a_1}{2m_2}g} \rightarrow (11)$$

نعوض a بقيمتها في المعادلة (10) لنجد عبارة التسارع a_1 للكتلة m_1 :

$$\boxed{a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g} \rightarrow (12)$$

نعود إلى عبارة التسارع النسبي (11) و نعوض التسارع المطلق بقيمته التي وجدناها في المعادلة (12) :

$$\boxed{a_r = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g} \rightarrow (13)$$

بات الآن من السهل استنتاج التسارعين المتبقيين.

عبارة التسارع a_2 للكتلة m_2:

$$a_2 = a_r - a_1 \;\; ; \;\; a_2 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g - \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{3m_3m_1 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g}$$

عبارة التسارع a_3 للكتلة m_3:

$$a_3 = a_r + a_1 \;\; ; \;\; a_3 = \frac{2m_3m_1 - 2m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g + \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\boxed{a_3 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_3 - 3m_1m_2}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g}$$

التمرين 4.5

ا/ زاوية الميل اللازمة لكي يقلع الجسم:

لما تبلغ قوة الاحتكاك السكوني قيمتها الأعظمية من أجل زاوية إقلاع θ_0 و التي تسمى زاوية الاحتكاك و هي زاوية حدية فتتكافأ مع مركبة الثقل $\vec{P}_x$، حينها يقلع الجسم:

$$\left.\begin{aligned} f_{s,\max} &= P_x = mg\sin\theta_0 \\ f_{s,\max} &= \mu N \\ N &= P_y = mg\cos\theta_0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu} \;,\; tg\theta_0 = 0,80 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 38,66°}$$

ب/ شدة قوة الاحتكاك الأعظمي:

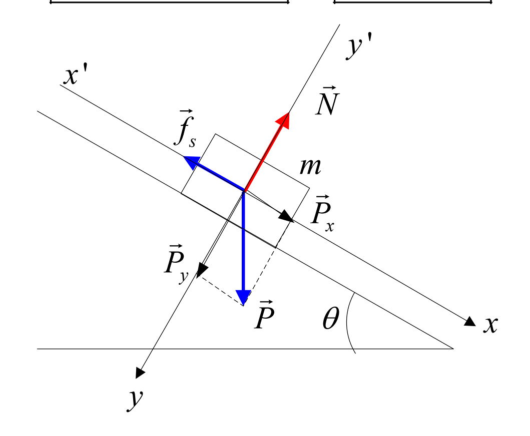
$$\boxed{f_{s,\max} = \mu N} \;,\; \boxed{f_{s,\max} = 3,13N}$$

ج/ القوة الناظمية عند ميل $35°$:

$$\boxed{N = P_y = mg\cos\theta} \;,\; \boxed{N = 4,1N}$$

د/ قوة الاحتكاك السكوني عند $35°$:

$$\boxed{f_s = P_x = mg\sin\theta} \;,\; \boxed{f_s = 2,87N}$$



التمرين 5.5

ا/ زاوية الميل اللازمة لكي ينتقل الجسم بسرعة ثابتة، هذا يعني أن مجموع القوى معدوم:

$$\vec{f}_c + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

بالإسقاط على المحورين:

$$\left.\begin{array}{l} P_x - f_c = 0 \Rightarrow mg\sin\theta_0 = \mu_c N \\ P_y - N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{tg\theta_0 = \mu_c}\ ,\ tg\theta_0 = 0,40\ ,\ \boxed{\theta_0 = 21,8°}$$

ب/ القوة الناظمية عند الميل 35°:

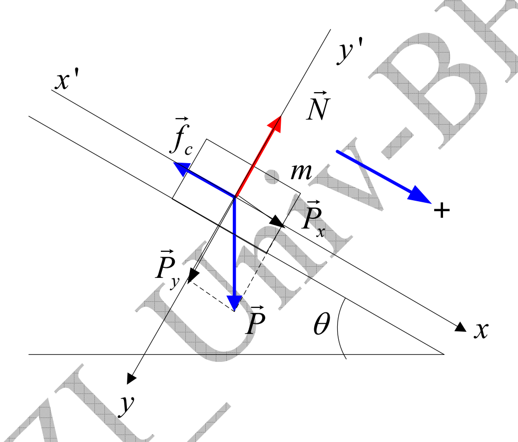
$$\boxed{N = mg\cos\theta}\ ,\ \boxed{N = 6,55N}$$

د/ قوة الاحتكاك الحركي عند 35°:

$$\boxed{f_c = \mu_c N}\ ;\ \boxed{f_c = 2,62N}$$

ه/ التسارع عند ميل 35°:

$$mg\sin\theta - f_c = ma \Rightarrow \boxed{\frac{mg\sin\theta - f_c}{m}}\ ,\ \boxed{a = 2,46N}$$



التمرين 6.5

ا/ شرط انزلاق الجملة مع بقاء الجسمين معا هو أن يكون للجسمين نفس السرعة و بالتالي نفس التسارع بالنسبة للمستوى الثابت.(من منظور الحركة النسبية يجب أن يساوي التسارع المطلق للجسم B تسارع الجر للجسم A).

لتكن $\vec{F}$ القوة الواجب تطبيقها على الجسم A لكي تنزلق الجملة مع إبقاء الجسمين معا. الشكل(أ).

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك لنحسب تسارع الجسمين:

بالنسبة للجسم A :

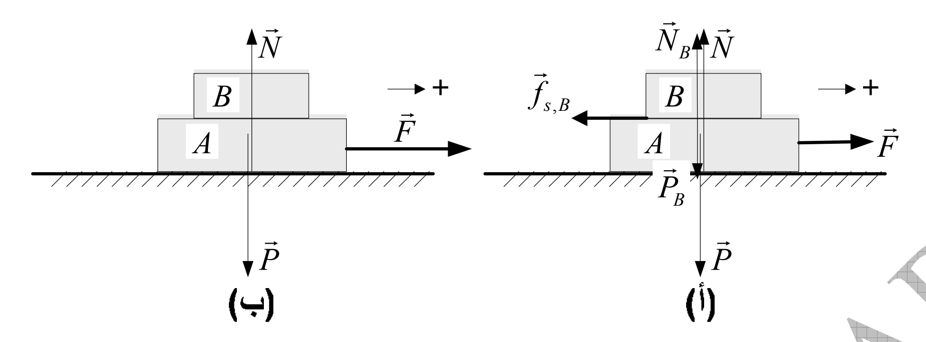
$$\vec{F} + \underbrace{\vec{P} + \vec{N}}_{\vec{0}} = (m_A + m_B).\vec{a}\ ,\ F = (m_A + m_B).a \Rightarrow a = \frac{F}{m_A + m_B} \rightarrow (1)$$

بالنسبة للجسم B : رغم حركته بالنسبة للمعلم الثابت إلا أنه ساكن بالنسبة للجسم A . و لذا قوة الاحتكاك المؤثرة عليه هي قوة الاحتكاك السكوني. يمكن أن نكتب:

$$\left.\begin{array}{l} -f_{s,\max,A} = m_A.a \\ f_{s,\max,A} = \mu_s N_A \\ N_A = P_A = m_A g \end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{-\mu_s m_A g}{m_A} \Rightarrow a = -\mu_s g \rightarrow (2)$$

لاستنتاج شدة القوة $\vec{F}$ يكفي المساواة بين المعادلتين (1) و (2):

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} = -\mu_s g \Rightarrow \boxed{F = \mu_s (m_A + m_B) g} \;,\; \boxed{F = 15,7N}$$

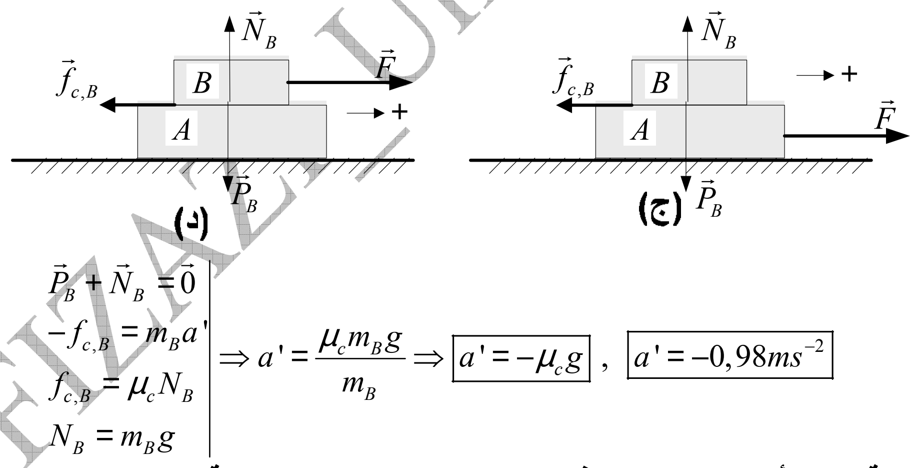


ب/ تسارع الجملة عند تطبيق القوة $\vec{F}$:

بالنسبة لمستوى الانزلاق لا توجد احتكاكات. إذن الجملة خاضعة للقوى $\vec{P},\vec{N}$ و $\vec{F}$. الشكل(ب)
تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك يمكننا من كتابة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \\ F = (m_A + m_B)a\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{(m_A + m_B)}} \;,\; \boxed{a = 1,96ms^{-2}}$$

ج/ تسارع الجسم B، بالنسبة للجسم A، إذا كانت القوة مطبقة على الجسم A (الشكل ج). الجسم B خاضع لثلاث قوى $\vec{P}_B,\vec{N}_B$ و $\vec{f}_{c,B}$ (قوة الاحتكاك الحركي لأن الجسم B في حركة بالنسبة للجسم A) و يحمله الجسم A الذي يخضع للقوة $\vec{F}$. نطبق العلاقة الأساسية للتحريك عل الجسم B :



$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}_B + \vec{N}_B = \vec{0} \\ -f_{c,B} = m_B a' \\ f_{c,B} = \mu_c N_B \\ N_B = m_B g\end{array}\right| \Rightarrow a' = \frac{\mu_c m_B g}{m_B} \Rightarrow \boxed{a' = -\mu_c g} \;,\; \boxed{a' = -0,98ms^{-2}}$$

الإشارة السالبة تعني أن الجسم B ينجذب إلى الاتجاه المعاكس للحركة.

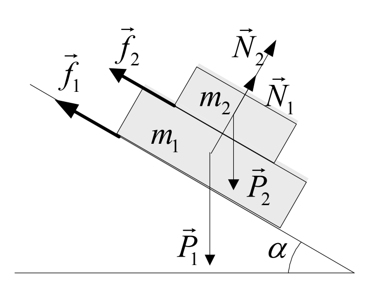
تسارع الجسم B إذا كانت القوة مطبقة عليه هو نفسه(الشكل د). الجسم B خاضع لأربع قوى $\vec{F},\vec{N}_B,\vec{P}_B$ و $\vec{f}_{c,B}$. نطبق العلاقة الأساسية للتحريك عل الجسم B :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \\ F - f_{c,B} = m_B a'' \\ f_{c,B} = \mu_c N_B \\ N_B = m_B g\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a'' = \frac{F - \mu_c m_B g}{m_B}} \;,\; \boxed{a'' = +0,98ms^{-2}}$$

الإشارة الموجبة تعني أن الجسم B ينجذب في اتجاه الحركة.

التمرين 7.5:

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على كل من الكتلتين:



$$\vec{P}_1+\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{f}_1+\vec{f}_2=m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{P}_2+\vec{N}_2+\vec{f}_2=m_2\vec{a}_2$$

نسقط العبارتين على المحور الموازي للمستوى المائل:

$$m_1 g\sin\alpha-f_1-f_2=m_1a_1\rightarrow(1)$$

$$m_2 g\sin\alpha_1-f_2=m_1a_2\rightarrow(2)$$

نعبر عن قوتي الاحتكاك الحركي:

$$\left.\begin{array}{l}f_1=h_1\left(N_1+N_2\right)\\ N_1=m_1g\cos\alpha\\ N_2=m_2g\cos\alpha\end{array}\right|\Rightarrow f_1=h_1g\left(m_1\cos\alpha+m_2\cos\alpha\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}f_2=h_2N_2\\ N_2=m_2g\cos\alpha\end{array}\right|\Rightarrow f_2=h_2m_2g\cos\alpha$$

نعوض قوتي الاحتكاك الحركي في المعادلتين (1) و (2) لنحصل على المعادلتين الجديدتين:

$$m_1g\sin\alpha-m_2gh_2\cos\alpha-h_1g\left(m_1\cos\alpha+m_2\cos\alpha\right)=m_1a_1\rightarrow(3)$$

$$m_2g\sin\alpha_1-h_2m_2g\cos\alpha=m_2a_2\ (4)$$

نستنتج الآن التسارعين من المعادلتين (3) و (4) :

$$\boxed{a_1=g\left(\sin\alpha-h_1\cos\alpha\right)-\frac{m_2}{m_1}g\cos\alpha\left(h_2+h_1\right)}\rightarrow\boxed{a_1=3{,}53ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_2=g\left(\sin\alpha-h_2\cos\alpha\right)}\rightarrow\boxed{a_2=7{,}79ms^{-2}}$$

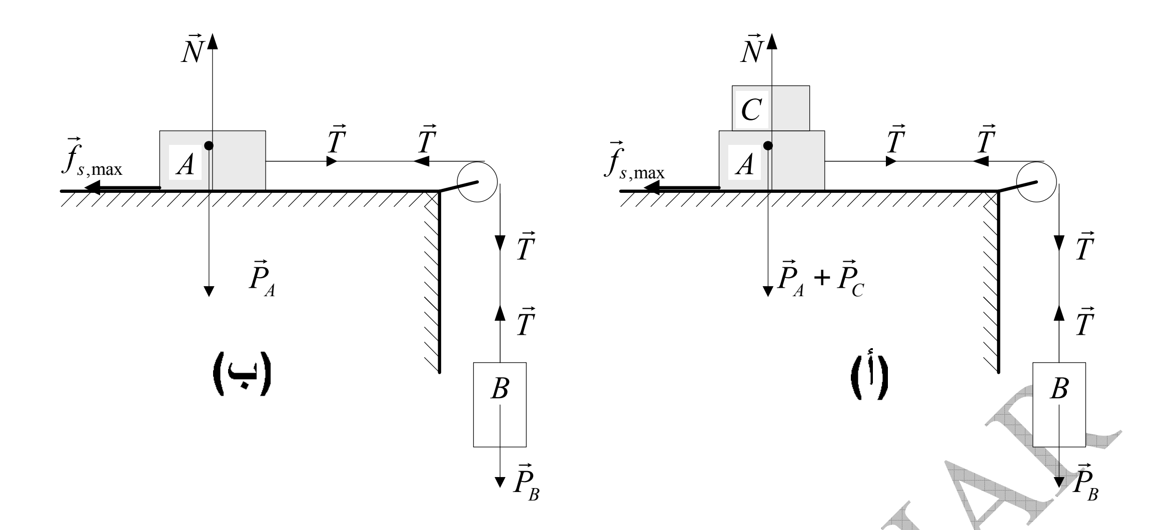
التمرين 8.5

نمثل كل القوى المؤثرة على الجملة كما هو مبين في **الشكل(أ)**. شرط إقلاع الجملة أي البدء في الحركة هو $T=f_{s,\max}$ و $T=P_B$:

$$\left.\begin{array}{l}T=f_{s,\max}\\ T=P_B=m_Bg\\ f_{s,\max}=\mu_sN\\ N=P_A=\left(m_A+m_C\right)g\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{m_C=\frac{\left(m_B-\mu_sm_A\right)}{\mu_s}}\ ,\ \boxed{m_C=15kg}$$

حين نرفع الجسم C **(الشكل ب)** فإننا نحصل على التسارع بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على كل الجملة:

$$\left.\begin{array}{l}T-f_c=m_Aa\\ P_B-T=m_Ba\\ f_c=\mu_cm_Ag\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{a=\frac{\left(m_B-\mu_cm_A\right)g}{m_B+m_A}}\ ,\ \boxed{a=1.36ms^{-2}}$$



التمرين 9.5

I/الرمي في الفراغ:

1/ نحصي القوى، نمثلها على الشكل ثم نطبق العلاقة الأساسية للتحريك. القوة الوحيدة التي تخضع لها النقطة المادية هي ثقلها $\vec{P}$. و عليه:

$$\left.\begin{array}{l}\sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{a} \\ \vec{P} = m\vec{g}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} = -g.\vec{u}_z}$$

2/ في كل لحظة $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_z$

وفق محور الـــ X : الحركة مستقيمة منتظمة:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_{0x} = v_0.\cos\theta \rightarrow (1)$$

وفق محور الـــ Z :الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام:

$$\sum \vec{F}_z = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_z = -g = Cte$$

$$v_z = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\theta \rightarrow (2)$$

شعاع السرعة اللحظية هو إذن:

$$\vec{v} = v_x.\vec{u}_x + v_z.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + \left(-gt + v_0 \sin\theta\right).\vec{u}_z} \rightarrow (3)$$

3/ نكامل العبارة (3) فنحصل على شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{0}}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t \left[v_0.\cos\theta.\vec{u}_x + \left(-gt + v_0 \sin\theta\right).\vec{u}_z\right]dt$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\underbrace{v_0.\cos\theta.t}_{x}\right).\vec{u}_x + \left(\underbrace{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta.t}_{z}\right).\vec{u}_z} \rightarrow (4)$$

4/ تبلغ القذيفة مداها لما ينعدم العلو $(z = 0)$. نحسب في البداية اللحظة التي من أجلها $(z = 0)$:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta . t = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g} \end{cases}$$

نعوض الزمن في معادلة الإحداثية x لنجد المدى:

$$x = v_0.\cos\theta.t \Rightarrow x_{\max} = \frac{2v_0^2.\sin\theta.\cos\theta}{g} \quad , \quad \boxed{x_{\max} = \frac{v_0^2.\sin 2\theta}{g}}$$

5/ تبلغ القذيفة ارتفاعها الأعظمي $z_{\max}$ لما تنعدم السرعة الشاقولية v_z. نبحث عن لحظة انعدام هذه السرعة من المعادلة (2):

$$v_z = -gt + v_0 \sin\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

نعوض الآن الزمن في عبارة z في المعادلة (4) لنجد:

$$\boxed{z_{\max} = \frac{v_0^2.\sin^2\theta}{2g}}$$

II/ **الرمي في الهواء:**

1/ في هذا الجزء القذيفة خاضعة لقوتين: $\boxed{\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}}$

2/ نتحقق من المعادلة التفاضلية:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}} \rightarrow (5)$$

3/ نستنتج العبارة الشعاعية للسرعة اللحظية $\vec{v}(t)$ مباشرة بحل المعادلة التفاضلية:

نتحقق أن حلها هو: $\vec{v} = \vec{A}e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\dfrac{m}{k}$

يبقى تحديد الثابت $\vec{A}$ و الذي نحصل عليه من الشروط الإبتدائية والتي هي : $t = 0, \vec{v} = \vec{v}_0$، و منه فإن:

$$\vec{v}_0 = \vec{A}e^{-0} + \vec{g}\frac{m}{k} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = \vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}}$$

و عليه فإن:

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}} \rightarrow (6)$$

القيمة الحدية هي لما يؤول الزمن إلى ∞، فنحصل من المعادلة (6) على: $\boxed{\vec{v}_L = \vec{g}\dfrac{m}{k}}$

ندخل القيمة الحدية في المعادلة (6) فنحصل على:

$$\boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{g}\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{g}\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L} \rightarrow (7)$$

نعبر الآن عن شعاع السرعة بدلالة شعاعي الواحدة $\vec{u}_x$ و $\vec{u}_z$:

$$\vec{v}_0 = v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_L = \vec{g}\dfrac{m}{k}\\ \vec{g} = -g\vec{u}_z\end{array}\right| \Rightarrow \vec{v}_L = -g\frac{m}{k}\vec{u}_z \Rightarrow v_L = -g\frac{m}{k}$$

$$\vec{v} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]e^{-\frac{k}{m}t} - v_L.\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\left(v_0\cos\theta\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_x}\vec{u}_x + \left[\underbrace{-v_L + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t}}_{v_z}\right]\vec{u}_z}$$

4/ للحصول على عبارة شعاع الموضع يكفي مكاملة العبارة (7) للسرعة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L\\ \displaystyle\int_0^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t\left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L\right]dt\\ \overrightarrow{OM} = \left[\left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\left(-\dfrac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \vec{v}_L.t\right]_0^t\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\vec{v}_0 - \vec{v}_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \vec{v}_L.t} \rightarrow (8)$$

للحصول على مركبتي $\overrightarrow{OM}$ ننشر المعادلة و نعوض $\vec{v}_0$ بـــمركبتيها و $\vec{v}_L$ بقيمتها كما فعلنا في عبارة السرعة اللحظية ثم ننظم المعادلة الناتجة:

$$\overrightarrow{OM} = \left[\left(v_0\cos\theta.\vec{u}_x + v_0\sin\theta.\vec{u}_z\right) + v_L.\vec{u}_z\right]\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L t.\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(v_0\cos\theta\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\vec{u}_x + \left[-v_L.t + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]\vec{u}_z$$

نصل إلى المركبتين:

$$\boxed{x(t) = \frac{m}{k}v_0\cos\theta\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \;,\; \boxed{z(t) = \frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta + v_L\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L.t} \rightarrow (9)$$

5/ تبلغ القذيفة علوها الأعظمي حين تنعدم السرعة الشاقولية. نبحث في البداية على اللحظة التي تنعدم فيها هذه السرعة:

$$v_z = -v_L + \left(v_0\sin\theta + v_L\right)e^{-\frac{k}{m}t_s} = 0$$

$$e^{-\frac{k}{m}t_s} = \frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t_s} = \frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L}$$

$$\ln e^{-\frac{k}{m}t_s} = \ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L}\right) \Rightarrow \frac{k}{m}t_s = -\ln\left(\frac{v_L}{v_0\sin\theta + v_L}\right)$$

$$\boxed{t_s = \frac{k}{m}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

نرجع للمعادلتين الزمنيتين (9) و نعوض الزمن بالقيمة التي وجدناها:

$$x_s = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)} \right)$$

$$\boxed{x_s = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta} \right)}$$

$$z_s = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)} \right) - v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(1 - \frac{1}{1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta} \right) - v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$z_s = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\theta + v_L\right)\left(\frac{v_0\sin\theta}{v_L + v_0\sin\theta} \right) - v_L.\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)$$

$$\boxed{z_s = \frac{m}{k} v_0 \sin\theta - v_L\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{v_0}{v_L}\sin\theta\right)}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)} \;,\; \boxed{z(t) = \frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta + v_L\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L.t} = (8)$$

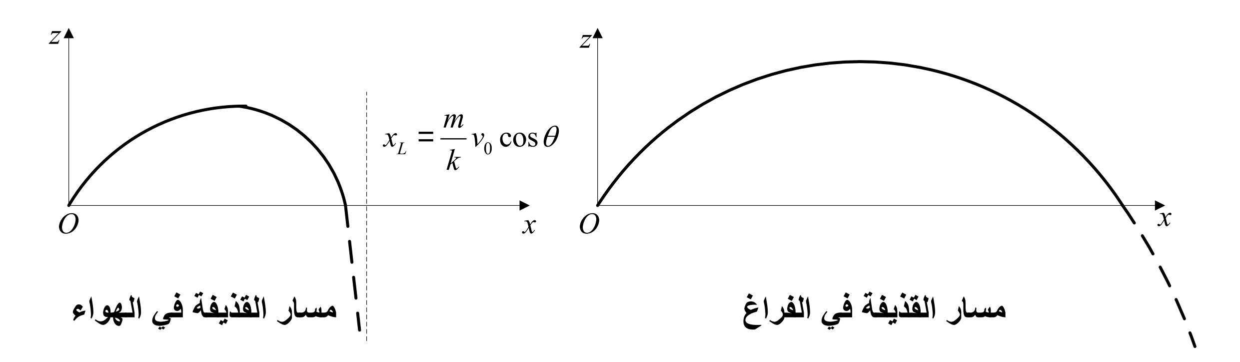
6/ في العبارة (9) نبحث عن نهايتي $x(t)$ و $z(t)$ لما $t \to \infty$:

$$x(t)_{t\to\infty} = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta = A \Rightarrow x(t)_{t\to\infty} = A \to (10)$$

$$z(t)_{t\to\infty} = \underbrace{\frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta + v_L\right)}_{B} - v_L.t \Rightarrow z(t)_{t\to\infty} = -v_L.t + B \to (11)$$

نستنتج من المعادلة (11) أنه عندما $t \to \infty$ فإن حركة القذيفة تصبح مستقيمة منتظمة و بالتالي فإن المسار يقبل خطا مقاربا لمعادلته (10).

<u>III خلاصة بيانية</u>: الشكلان التاليان يبينان المسار في كل من الحالتين.



التمرين 10.5

الحركة بوجود احتكاك:

1/ الجسيمة خاضعة لثلاث قوى و هي الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد فعل سطح الكرة $\vec{N}$ على الجسيمة و قوة الاحتكاك الحركي $\vec{f}$. انطلاقا من الشكل(أ)- في الأسفل- و بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك يمكن أن نكتب:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$$

نسقط القوى على المحورين MT و MN :

$$P_T - f = ma_T = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow mg\sin\theta - f = m\frac{dv}{dt} \rightarrow (1)$$

$$-N + P_N = ma_N = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow -N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \rightarrow (2)$$

عبارة قوة الاحتكاك الحركي هي:

$$\left.\begin{aligned} f &= \mu N \\ N &= mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} \end{aligned}\right| \Rightarrow f = \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right)$$

نعوض في المعادلة (1) لنحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$mg\sin\theta - \mu\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{R}v^2 = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}$$

2/ **الحركة بدون احتكاك:**

ا/ نعود إلى المعادلة (1)و نتخلص من f و نختزل الكتلة:

$$\frac{dv}{dt} - g\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

نضرب الطرفين في $d\theta$ مع العلم أن $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}dv &= g\sin\theta . d\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega = \frac{v}{R} \end{aligned}\right| \Rightarrow vdv = gR\sin\theta . d\theta \rightarrow (3)$$

نكامل طرفي المعادلة (3) علما أن مجال تغير θ هو $[0,\theta]$ و مجال تغير v هو $[0,v]$:

$$\int_0^v vdv = gR\int_0^\theta \sin\theta.d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - 0 = -Rg\left(\cos\theta - \cos 0\right)$$

و في الأخير:

$$v^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta\right) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2Rg\left(1-\cos\theta\right)}} \rightarrow (4)$$

ب/ مقدار الزاوية θ_0 التي من أجلها تغادر الجسيمة سطح الكرة: يجب الانتباه إلى أن الجسيمة تغادر السطح لما قوة رد الفعل $\vec{N}$ تنعدم.

نعود إلى المعادلة (2) و نقيم N:

$$-N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

نعوض v^2 بقيمتها:

$$N = mg\cos\theta - m\frac{2Rg\left(1-\cos\theta\right)}{R} \Rightarrow \boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2\right)}$$

و بالتالي الزاوية التي من أجلها تغادر الجسيمة السطح هي:

$$mg\left(3\cos\theta_0 - 2\right) = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = 2/3 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = 48°}$$

<u>المناقشة:</u> من خلال عبارة الزاوية نستنتج أن هذه الأخيرة لا تتعلق لا بالكتلة و لا بنصف القطر للكرة ولا بتسارع الجاذبية شريطة أن تكون السرعة الابتدائية $v(0)$ معدومة.

<u>إنتباه:</u> $v_0 \neq v(0)$: v_0 السرعة عند مغادرة الجسيمة السطح الكروي، $v(0)$ السرعة الابتدائية.

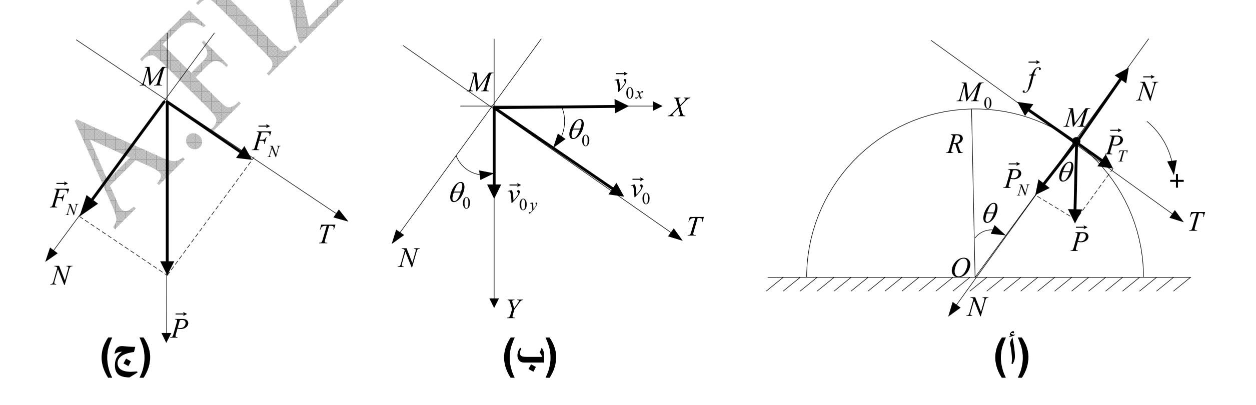
أما إذا كانت السرعة الابتدائية غير معدومة فإنه يمكن البرهان على أن:

$$\boxed{\cos\theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{v(0)^2}{3Rg}}$$

في هذه الحالة الزاوية θ_0 تتعلق بـــ $v(0)$ ، R و g غير أنها تبقى مستقلة عن الكتلة m.

ج/ حساب السرعة المناسبة:

$$\left.\begin{array}{l} v_0^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right) \\ \cos\theta_0 = 2/3 \end{array}\right| \Rightarrow v_0 = \sqrt{2Rg\left(1-2/3\right)}\ ,\ \boxed{v_0 = 3,65ms^{-1}}$$



3/ دراسة حركة الجسيمة عند مغادرتها السطح. نحن أمام حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية.

ا/ ندرس الحركة في المعلم MXY (الشكل ب).

وفق محور الـــ X : الحركة مستقيمة منتظمة: $\sum\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_0.\cos\theta_0 \rightarrow (5)$

وفق محور الــ Y :الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_y = g = Cte$$
$$v_y = gt + v_0 \sin\theta_0 \rightarrow (6)$$

نعطي الآن عبارة شدة السرعة اللحظية للقذيفة:

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v_0^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 .t + 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right)}}$$

أما عبارة شعاع السرعة فهي:

$$\boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta_0.\vec{i} + \left(gt + v_0 \sin\theta_0\right)\vec{j}}$$

ب/ شدتا القوتين المماسية والناظمية: (الشكل ج)

<u>**القوة المماسية:**</u>

$$F_T = m.a_T = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{F_T = \frac{mg\left(gt + v_0 \sin\theta_0\right)}{\sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 .t + v_0^2}}}$$

<u>**القوة الناظمية:**</u> لا ينصح باستعمال القانون $F_N = m\dfrac{v^2}{r}$ و ذلك لأن نصف قطر الانحناء مجهول و حذار من الاعتقاد أنه R .

و لذا نستنتج هذه القوة من العبارة $\vec{P} = \vec{F}_N + \vec{F}_T \Rightarrow \boxed{F_N = \sqrt{P^2 - F_T^2}}$

$$\boxed{F_N = mg\sqrt{1 - \frac{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 .t + v_0^2 \sin^2\theta_0}{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0 .t + v_0^2}}}$$

<u>**التمرين 11.5**</u>

ا/ شدة حقل الجاذبية الأرضية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر:

$$\boxed{g_T = G\frac{M_T}{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_T = 6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}}{\left(1,92.10^8\right)^2} \Rightarrow \boxed{g_T = 1,08.10^{-2}\,N.kg^{-1}}$$

ب/ شدة حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر:

$$\boxed{g_L = G\frac{M_L}{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}} \quad , \quad g_L = 6,67.10^{-11}\frac{7,36.10^{22}}{\left(1,92.10^8\right)^2} \Rightarrow \boxed{g_L = 1,33.10^{-4}\,N.kg^{-1}}$$

ج/ شدة الحقل الناتج عن حقل الجاذبية الأرضية و حقل الجاذبية القمرية عندما يكون الصاروخ في منتصف الرحلة بين الأرض و القمر:

$$\boxed{g_R = g_T - g_L} \quad , \quad \boxed{g_R = 1,07.10^{-2}\,N.kg^{-1}}$$

د/ البعد من مركز الأرض الذي ينعدم فيه الحقل الناتج عن جاذبيتي الأرض و القمر:

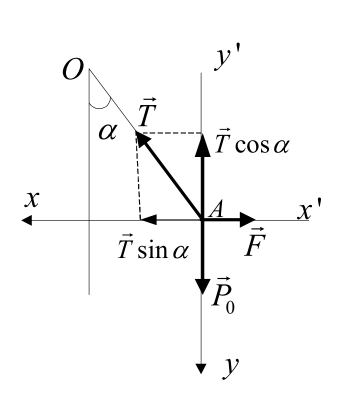
$$g_R = 0 \Rightarrow g_L = g_T \;,\; G\frac{M_L}{\left(d-r\right)^2} = G\frac{M_T}{r^2} \Rightarrow \frac{M_L}{\left(d-r\right)^2} = \frac{M_T}{r^2}$$

$$\frac{r^2}{\left(d-r\right)^2} = \frac{M_T}{M_L} \Rightarrow \frac{r^2}{\left(d-r\right)^2} = 81,25$$

$$\frac{r}{d-r} = 9,01 \Rightarrow r = 3,45.10^8\,m \rightarrow \boxed{r = 345000km}$$

<u>التمرين 12.5</u>

مثلنا على الشكل القوى المؤثرة في النقطة A . بإسقاط القوى على المحورين المتعامدين يكون لدينا في حالة التوازن:



$$\left.\begin{array}{l} P_0 = T\cos\alpha \\ P_0 = kl_0 \\ T = kl_1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{l_1 = \frac{l_0}{\cos\alpha}}$$

$$F = T\sin\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} F = kl_2 = T\sin\alpha \\ T = \dfrac{P_0}{\cos\alpha} = \dfrac{kl_0}{\cos\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{kl_0}{\cos\alpha}\sin\alpha = kl_2 \Rightarrow \boxed{l_2 = l_0 tg\alpha}$$

<u>التمرين 13.5</u>

ا/ القوة المؤثرة على الجسم:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = 6\left(6\vec{i} - 24t.\vec{j}\right) \;,\; \boxed{\vec{F} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j}}$$

ب/ عزم القوة بالنسبة للمبدإ:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k}}$$

ج/ كمية حركة الجسم:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}}$$

العزم الحركي بالنسبة للمبدإ:

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36t - 36 & -72t & 18 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}}$$

د/ نتأكد من أن $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$:

$$\vec{p} = \left(36t - 36\right)\vec{i} - 72t^2.\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j} = \vec{F}}$$

نتأكد من أن $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$:

$$\vec{L} = \left(144t^3 + 144t^2\right)\vec{i} + \left(54t^2 + 72t + 72\right)\vec{j} + \left(72t^4 + 288t^3\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(432t^2 + 288t\right)\vec{i} + \left(108t + 72\right)\vec{j} + \left(-288t^3 + 864t^2\right)\vec{k} = \vec{\tau}}$$

التمرين 14.5

1/ التعبير عن سرعة M بالنسبة لــ R :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = l\vec{u}_r$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = l\dot{\vec{u}}_r \\ \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

2/ نحسب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v}_r + m\vec{v}_\theta \\ \vec{v}_r = l.\dot{\vec{u}}_r = 0\left(l = Cte\right) \\ \vec{v}_\theta = l\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r = l & 0 & 0 \\ 0 & ml\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \; ; \; \boxed{\vec{L}_O = ml^2\dot{\theta}.\vec{u}_z}$$

حتى يتسنى لنا تطبيق نظرية العزم الحركي لابد من حساب عزم القوى المطبقة على النقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\tau}_O = \left(\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{\vec{0}}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \\ \vec{P} = \vec{P}_r + \vec{P}_\theta \\ \vec{P}_r = mg\cos\theta.\vec{u}_r \\ \vec{P}_\theta = -mg\sin\theta.\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & -mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_O = -mgl\sin\theta.\vec{u}_z}$$

نطبق نظرية العزم الحركي:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_0 \; ; \; ml^2\ddot{\theta}.\vec{u}_z = -mgl\sin\theta.\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \rightarrow (1)$$

نحسب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v}_x + m\vec{v}_y \end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \; ; \; \boxed{\vec{L}_O = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

نحسب عزم القوى المطبقة على النقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\tau}_O = \left(\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{0}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \\ \vec{P} = \underbrace{\vec{P}_x}_{0} + \vec{P}_y = mg.\vec{j} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} \; ; \; \boxed{\vec{\tau}_O = mgx.\vec{k}}$$

نطبق نظرية العزم الحركي:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{\tau}_0 \;\; ; \;\; m\left(\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y}-y\ddot{x}\right)\vec{k}=mgx.\vec{k} \Rightarrow \boxed{x\ddot{y}-y\ddot{x}=gx} \rightarrow (2)$$

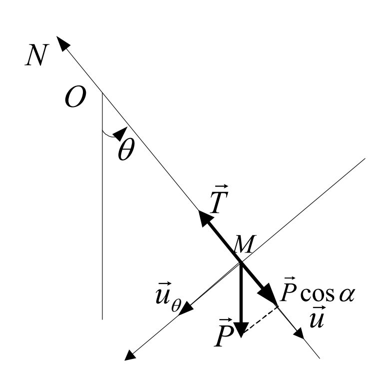
نتحقق أن النتيجتين متساويتان:

$$x=l\sin\theta \;\; ; \;\; \dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta \;\; ; \;\; \ddot{x}=l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$y=l\cos\theta \;\; ; \;\; \dot{y}=-l\dot{\theta}\sin\theta \;\; ; \;\; \ddot{y}=-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta$$

نعوض العناصر الخمسة في المعادلة (2)فنجد المعادلة (1):

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0} \rightarrow (3)$$



نطبق الآن المبدأ الأساسي للتحريك:

تخضع الكتلة m في كل لحظة لقوتين: ثقلها $\vec{P}$ و توتر الخيط $\vec{T}$ بحيث نرمز إلى محصلتهما بـــ $\vec{F}$.

يمكننا تحليل المحصلة إلى مركبتين مماسية و ناظمية (الشكل المرافق):

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}&=\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}\\ \vec{F}&=\vec{F}_T+\vec{F}_N=m\vec{a}\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{P}+\vec{T}=\vec{F}_T+\vec{F}_N$$

نعرف العلاقة بين السرعة الخطية و السرعة الزاوية و كذلك العلاقة بين التسارع الخطي و التسارع الزاوي:

$$v=\dot{\theta}l \;\; , \;\; a_T=\frac{dv}{dt}=\ddot{\theta}l \;\; , \;\; a_N=\frac{v^2}{l}=\dot{\theta}^2 l$$

بما أننا أمام حركة دورانية للكتلة m، يمكننا إدخال عزم القوى بالنسبة للمحور OZ. عزما القوتين $\vec{F}_N$ و $\vec{T}$ معدومان لأن القوتين تلاقيان محور الدوران. عزم الثقل إرجاعي و بالتالي فهو سالب.

$$\left.\begin{aligned}\tau&=\tau_{\vec{P}}+\tau_{\vec{T}}=\tau_{\vec{F}_T}+\tau_{\vec{F}_N}\\ \tau_{\vec{T}}&=\tau_{\vec{F}_N}=0\\ \tau_{\vec{P}}&=-P.l\sin\theta\\ \tau_{\vec{F}_T}&=F_T.l=m\ddot{\theta}l^2\end{aligned}\right| \Rightarrow -mgl\sin\theta=m\ddot{\theta}l^2$$

من كل هذا نحصل على معادلة الحركة:

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0} \rightarrow (4)$$

المعادلتان (1) و (4) المحصل عليهما متساويتان.

3/ لدينا في كل لحظة $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$. بالإسقاط على المحور الناظمي يكون لدينا:

$$-mg\cos\theta+T=ma_N \Rightarrow T=mg\cos\theta+m\dot{\theta}^2 l$$

نلاحظ أن التوتر يتغير في كل لحظة. من أجل اهتزازات ذات سعة صغيرة جدا $(\sin\theta\approx\theta)$ تصبح المعادلة التفاضلية (1) على الشكل:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

حلها شائع و هو:

$$\theta = \theta_0 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

و منه فإن السرعة الزاوية هي:

$$\dot{\theta} = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

عند مرور النواس من موضع التوازن تنعدم الزاوية θ:

$$\theta = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}t = 0 \pm k\pi$$

حينها تكون السرعة أعظمية:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\theta} = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(0 \pm k\pi\right) \\ \cos\left(0 \pm k\pi\right) = \pm 1\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\left|\dot{\theta}\right| = \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

و يصبح التوتر أعظميا و يساوي:

$$\boxed{T = m\left(g + \theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}\right)}$$

و هذا هو الشرط الواجب توفره في التوتر T حتى لا ينقطع الخيط، أي أن على الخيط أن يتحمل على الأقل هذه الشدة حتى لا ينكسر.

<u>التمرين 15.5</u>

العزم الحركي للجملة يساوي مجموع العزوم الحركية لكل المكونات الجزئية للجملة. في حالتنا هذه العزم الحركي للجملة بالنسبة للنقطة O $\left(\vec{L}_{O/G}\right)$ يساوي عزم النقطة G، حيث مركز عطالة الكتلتين، بالنسبة لــ O زائد عزمي النقطتين A $\left(\vec{L}_{A/G}\right)$ و B $\left(\vec{L}_{B/G}\right)$ بالنسبة لــ G.

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{G/O} + \vec{L}_{A/G} + \vec{L}_{B/G}$$

نبدأ بحساب $\left(\vec{L}_{O/G}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_{G/O} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p}_{G/O} \\ \vec{p}_{G/O} = 2m\vec{v}_{G/O}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_{G/O} = 2m\left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_{G/O}\right)$$

$$\vec{L}_{G/O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_G = a\cos\theta_1 & y_G = a\sin\theta_1 & 0 \\ \dot{x}_G = -a\dot{\theta}_1\sin\theta_1 & \dot{y}_G = a\dot{\theta}_1\cos\theta_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(x_G\dot{y}_G - \dot{x}_G y_G\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{G/O} = 2ma^2\dot{\theta}_1^2} \rightarrow (1)$$

و نحسب الآن $\left(\vec{L}_{A/G} = \vec{L}_{B/G}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_{A/G} = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{p}_{A/G} \\ \vec{p}_{A/G} = m\vec{v}_{A/G}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_{A/G} = m\left(\overrightarrow{GA} \wedge \vec{v}_{A/G}\right)$$

$$\vec{L}_{O/G}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x'_A=d\cos\theta_2 & y'_A=d\sin\theta_2 & 0\\ \dot{x}'_A=-d\dot{\theta}_2\sin\theta_2 & \dot{y}'_A=d\dot{\theta}_2\cos\theta_2 & 0\end{vmatrix}=\left(x'_A\dot{y}'_A-\dot{x}'_Ay'_A\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{A/G}=md^2\dot{\theta}_2^2=\vec{L}_{B/G}}\rightarrow(2)$$

ما بقي لنا إلا أن نجمع العبارتين (1) و (2) فنحصل على المطلوب:

$$\vec{L}_O=2ma^2\dot{\theta}_1^2+2md^2\dot{\theta}_2^2\quad,\quad\boxed{\vec{L}_O=2m\left(a^2\dot{\theta}_1^2+d^2\dot{\theta}_2^2\right)}$$

التمرين 16.5

1/ في كل لحظة النقطة M خاضعة لثقلها و توتر الخيط و تقوم بحركة دائرية منتظمة نصف قطرها في المستوى OXY حول المحور AZ. إسقاط القوتين على المحور القطري ينتج عنه قوة مركزية $T\sin\alpha$.

و عليه:

$$\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a}$$

$$\left.\begin{array}{l}T\sin\alpha=ma_N=m\omega^2r\\ r=l\sin\alpha\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{T=m\omega^2l}$$

أما الزاوية فنحددها انطلاقا من الشكل المرافق أسفله:

$$tg\alpha=\frac{T\sin\alpha}{mg}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{m\omega^2l\sin\alpha}{mg}$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{g}{\omega^2l}}$$

2/ حساب عبارة العزم الحركي لـــ M بالنسبة لـــ A بالإحداثيات الأسطوانية ذات المبدإ O:

$$\vec{L}_{M/A}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{p}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=-z\vec{u}_z+r\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{AM}=-l\cos\alpha.\vec{u}_z+l\sin\alpha.\vec{u}_r$$

$$\vec{v}=\underbrace{-\dot{z}\vec{u}_z+z\dot{\vec{u}}_z+\dot{r}\vec{u}_r}_{\vec{0}}+r\dot{\vec{u}}_r=r\omega\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}=\vec{v}_\theta=l\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{p}=ml\omega\sin\alpha.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{L}_{M/A}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha\\ 0 & ml\omega\sin\alpha & 0\end{vmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{L}_{M/A}=ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r+\sin\alpha.\vec{u}_z\right)}$$

نتأكد أن مشتقته بالنسبة للزمن تساوي عزم محصلة القوى المطبقة على A بالنسبة لـــ M:

بداية نحسب عزم القوى بالنسبة للنقطة A: $\vec{\tau}_{M/A}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}$

الشعاع $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

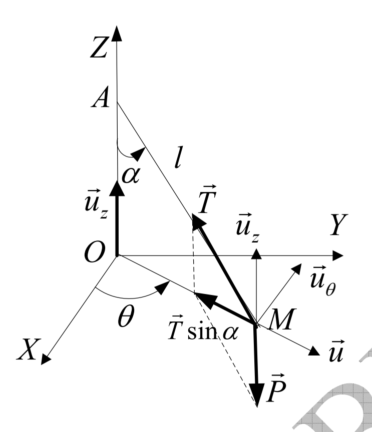
$$\vec{F} = T\sin\alpha = ma_N = m\omega^2 r$$

$$\boxed{\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}_r}$$

الشعاع $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = -z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$$

$$\vec{F} = m\omega^2 l\sin\alpha.\vec{u}$$



$$\vec{\tau}_{M/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ l\sin\alpha & 0 & -l\cos\alpha \\ m\omega^2 l\sin\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{M/A} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\vec{u}_\theta} \rightarrow (1)$$

نقوم باشتقاق العزم الحركي بالنسبة للزمن:

$$\vec{L}_{M/A} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\vec{u}_r + \sin\alpha.\vec{u}_z\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega\sin\alpha\left(\cos\alpha.\dot{\vec{u}}_r + 0\right)$$

نعرف أن: $\dot{\vec{u}}_r = \omega.\vec{u}_r$ و بالتعويض نحصل على:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = ml^2\omega^2\sin\alpha.\cos\alpha.\vec{u}_\theta} \rightarrow (2)$$

و هكذا نكون قد تأكدنا من صحة نظرية العزم الحركي:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{M/A}}{dt} = \vec{\tau}_{M/A}}$$

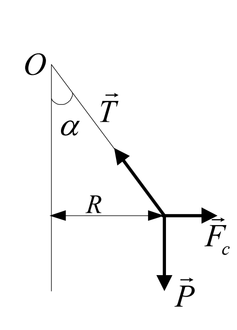
التمرين 17.5:

1/ القطار يدخل في منعطف دائري فتصبح حركته دائرية نحو اليسار لأن القوة الطاردة أو النابذة تجذب النواس نحو اليمين.

2/ الشكل المقابل يبين لنا القوى المؤثرة على النواس بالنسبة للمسافر. توازن هذه القوى ينجر عنه:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_c = -\vec{T}$$

$$tg\alpha = \frac{F_c}{P} \Rightarrow tg\alpha = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} \Rightarrow \boxed{R = \frac{v^2}{g.tg\alpha}}$$



تطبيق عددي:
$$R=\frac{\left(\frac{120.10^3}{3600}\right)^2}{9.8\times 0,176}\Rightarrow \boxed{R=631N}$$

3/ يقطع القطار خلال ثلاثين ثانية قوسا دائريا يحصر الزاوية المطلوب حسابها.

المسافة المقطوعة خلال $30s$: $d=vt\ ,\ d=1000m$

و هذا يعني أن القطار إستدار بزاوية:
$$d=R\theta\Rightarrow\boxed{\theta=\frac{d}{R}}\ ,\ \theta\approx 1,59rad\ ,\ \boxed{\theta\approx 91°}$$

التمرين 5.18:

في اللحظة t يكون ثقل الجزء BC هو $\vec{P}_1$ و ثقل الجزء AB هو $\vec{P}_2$.

نطبق المبدأ الأساسي للتحريك عل الجملة:
$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=\Big(\underbrace{M_1+M_2}_{M}\Big)\vec{a}$$

نسقط العبارة الشعاعية على محور شاقولي موجه نحو الأسفل و نرمز بـــ x إلى طول جزء الحبل BC :
$$\left.\begin{array}{l}P_1-P_2=Ma\\ M=\lambda L\\ P_1=M_1g=\lambda xg\\ P_2=M_2g=\lambda\left(L-x\right)g\end{array}\right|\Rightarrow \lambda xg-\lambda\left(L-x\right)g=\lambda L\frac{dv}{dt}$$

نختزل λ فتصير لدينا معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات طرف ثاني:
$$\left.\begin{array}{l}2gx-gL=L\dfrac{dv}{dt}\\ a=\dfrac{dv}{dt}=\ddot{x}\end{array}\right|\Rightarrow L\ddot{x}=2gx-gL\Rightarrow\boxed{\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g}$$

لكي نتحقق من $a=\frac{g}{3}$ $x=\frac{2}{3}L\rightarrow$ نعوض في المعادلة التفاضلية x بالقيمة المقترحة:
$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x}-\dfrac{2g}{L}x=-g\\ x=\dfrac{2}{3}L\end{array}\right|\Rightarrow \ddot{x}=a=\frac{4g}{3}-g\Rightarrow\boxed{a=\frac{g}{3}}$$

نبحث الآن على النتيجة المتعلقة بالسرعة:

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية بدون طرف ثاني هي: $r^2-\frac{2g}{L}=0$

و حلاها هما: $r_1=-\sqrt{\frac{2g}{L}}\ \ ;\ \ r_1=+\sqrt{\frac{2g}{L}}$

و عليه فإن حل هذه المعادلة التفاضلية هو:
$$\boxed{x=Ae^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+Be^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}+\frac{L}{2}}\rightarrow(1)$$



يبقى تحديد الثابتين A و B . و هذا ما نستنتجه من الشرطين الابتدائيين و اللذين هما $t=0\left|\begin{array}{l} x=b \\ v=\dot{x}=0 \end{array}\right.$

عبارة السرعة هي: $\boxed{v=\dot{x}=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{\sqrt{\frac{2g}{L}}t}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}}e^{-\sqrt{\frac{2g}{L}}t}}\rightarrow(2)$

نعوض في المعادلتين (1) و (2) لنحدد A و B :

$$\left.\begin{array}{l} b=A+B+\dfrac{L}{2} \\ 0=A\sqrt{\dfrac{2g}{L}}-B\sqrt{\dfrac{2g}{L}}\Rightarrow A=B \end{array}\right|\Rightarrow \boxed{A=B=\frac{b}{2}-\frac{L}{4}}$$

لتسهيل الحسابات نضع $\omega=\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$ و كما نعرف في علم المثلثات تعاريف و العلاقات الخاصة بالجيب الزائدي (sh) و جيب التمام الزائدي (ch) فأن:

$$sh\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\quad;\quad ch\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\quad;\quad ch^2\omega t-sh^2\omega t=1$$

فنكتب المعادلتين (1) و (2) على النحو التالي:

$$x=2.\frac{2b-L}{4}\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)+\frac{L}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2b-L}{2}ch\omega t+\frac{L}{2}\rightarrow(3)$$

$$v=\dot{x}=2.\frac{2b-L}{4}\omega\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)\Leftrightarrow v=\dot{x}=\frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t\rightarrow(4)$$

بما أن $x=\dfrac{2}{3}L$ نعوض في المعادلة (3) و نستخرج عبارة جيب التمام الزائدي من المعادلة (3):

$$\frac{2}{3}L=2\frac{2b-L}{4}ch\omega t+\frac{L}{2}\Rightarrow \boxed{ch\omega t=\frac{L}{6b-3L}}\rightarrow(5)$$

و من المعادلة (4) نستخرج الجيب الزائدي:

$$v=\dot{x}=\frac{2b-L}{2}\omega sh\omega t\Rightarrow \boxed{sh\omega t=\frac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}}\rightarrow(6)$$

عرفنا أن $ch^2\omega t-sh^2\omega t=1$. نجمع المعادلتين (5) و (6) طرف لطرف بعد تربيعهما:

$$\left.\begin{array}{l} ch^2\omega t=\left(\dfrac{L}{6b-3L}\right)^2 \\ sh^2\omega t=\left(\dfrac{2v}{\omega\left(4b^2+L^2-4bL\right)}\right)^2 \\ ch^2\omega t-sh^2\omega t=1 \end{array}\right|\Rightarrow v^2=\omega^2\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)$$

نعود فنعوض ω بقيمتها لنحصل في نهاية المطاف على القيمة التي كان علينا التأكد منها:

$$v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}$$

التطبيق العددي: $L=12m$ و $b=7m$

$$v\approx 10,6ms^{-1}$$

الطريقة الثانية:

انطلاقا من المعادلة $\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g$، و بعملية تكاملية نتوصل إلى عبارة السرعة بدلالة الفاصلة x :

$$\ddot{x}-\frac{2g}{L}x=-g\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{2g}{L}x-g\Rightarrow\frac{dv}{dt}dx=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\frac{dx}{dt}dv=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx\Rightarrow v.dv=\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx$$

$$\int_0^v v.dv=\int_b^x\left(\frac{2g}{L}x-g\right)dx\Rightarrow\frac{1}{2}v^2=\frac{g}{L}x^2-gx\Rightarrow \boxed{v^2=2\frac{g}{L}x^2-2gx-2\frac{g}{L}b^2+2gb}$$

يبقى الآن التحقق من تطابق هذه النتيجة مع النتيجة السابقة، و ذلك بتعويض x بـــ $\frac{2}{3}L$. في الأخير نجد نفس النتيجة:

$$v=\sqrt{\frac{2g}{L}\left(-b^2+bL-\frac{2}{9}L^2\right)}$$

التمرين 19.5

1/ مهما كان موضع النقطة M على سطح المخروط فإن الزاوية في كل لحظة $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Oz}\right)=\alpha$ و بالتالي:

$$tg\alpha=\frac{r}{z}=\frac{r_0}{z_0}\Rightarrow \boxed{z=r\frac{r_0}{z_0}}$$

2/ نعرف من الدرس أن تسارع النقطة M في الإحداثيات الأسطوانية هو:

$$\vec{a}=\Big(\underbrace{\ddot{r}-r\dot{\theta}^2}_{a_r}\Big)\vec{u}_r+\Big(\underbrace{r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}}_{a_\theta}\Big)\vec{u}_\theta+\underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{u}$$

إذا بقيت النقطة على سطح المخروط فإن: $\ddot{z}=\ddot{r}\frac{r_0}{z_0}$. القوتان المؤثرتان على النقطة المادية هما ثقلها $\vec{P}$ ذي المركبة الوحيدة $\vec{P}=-mg\vec{u}_z$، و قوة رد فعل السطح $\vec{R}$ ذات المركبتين $\vec{R}=\vec{R}_r+\vec{R}_z=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+R\sin\alpha.\vec{u}_z$.

نطبق المبدأ الأساسي للتحريك ثم نسقط القوتين على المحاور الثلاثة للمعلم الاسطواني لنحصل على:

$$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}=\vec{F}$$

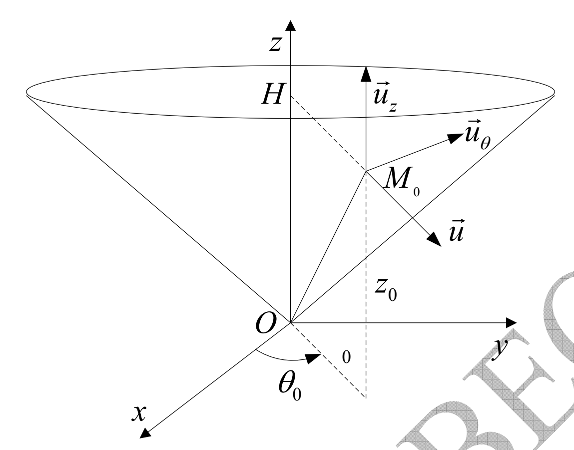
$$\vec{F}=\vec{F}_r+\vec{F}_\theta+\vec{F}_z=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta+m\ddot{z}\vec{u}_z\rightarrow(1)$$

$$\vec{F}=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+R\sin\alpha.\vec{u}_z-mg\vec{u}_z$$

$$\vec{F}=-R\cos\alpha.\vec{u}_r+\left(R\sin\alpha-mg\right)\vec{u}_z\rightarrow(2)$$

بمطابقة المعادلتين (1) و (2) نحصل على المعادلات التفاضلية الثلاثة التالية:

$$\begin{cases} -R\cos\alpha = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \rightarrow (3) \\ 0 = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \rightarrow (4) \\ -mg + R\sin\alpha = m\dfrac{z_0}{r_0}\ddot{r} \rightarrow (5) \end{cases}$$



3/ من المعادلة (4) نستنتج أن المقدار $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ و هو مشتق للمقدار $r^2\dot{\theta}$ بالنسبة للزمن. و هذا يؤدي بنا إلى أن $r^2\theta = C^{te}$:

$$\left(r^2\dot{\theta}\right)' = 2\dot{r}r.\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow r^2\dot{\theta} = C^{te}$$

نعرف عبارة السرعة اللحظية في الإحداثيات الأسطوانية و منها نستنتج عبارة السرعة الإبتدائية:

$$v(t) = \dot{r}(t)\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\vec{u}_r \Rightarrow v(0) = \dot{r}(0)\vec{u}_r + r(0)\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta + \dot{z}(0)\vec{u}_r$$

شدة السرعة الإبتدائية هي إذن:

$$v(0) = \sqrt{\left[\dot{r}(0)\right]^2 + \left[r(0)\dot{\theta}(0)\right]^2 + \left[\dot{z}(0)\right]^2}$$

النص يفرض علينا عبارة $\dot{\theta}$ بدون $\dot{r}(0)$ و لا $\dot{z}(0)$. هذا غير ممكن إلا بشروط ابتدائية من الشكل $\dot{r}(0) = \dot{z}(0) = 0$. و هذا ما نفترضه في باقي المسألة. استنادا لهذا فإن السرعة الابتدائية هي:

$$v(0) = r(0)\dot{\theta}(0)$$

تبعا لكل هذا يمكن مواصلة التحليل بحيث:

$$r^2\dot{\theta} = C^{te} \Rightarrow r(t)^2\,\dot{\theta}(t) = r(0)^2\,\dot{\theta}(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta}(t) = \dfrac{r(0).r(0).\dot{\theta}(0)}{r(t)^2} \\ v(0) = r(0).\dot{\theta}(0) \\ v(0) = v_0 \;\;,\;\; r(0) = r_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}}$$

4/ المعادلة (5) هي المعنية في هذا السؤال لأن فيها التابع الوحيد $r(t)$ ، عكس المعادلتين (3) و (4) المحتويتين على $r(t)$ و $\theta(t)$ معا. من المعادلة (3) يمكن كتابة:

$$R=\frac{1}{\sin\alpha}\left[mg+m\frac{z_0}{r_0}\ddot{r}\right]$$

نعوض R بهذه العبارة الأخيرة في المعادلة (3) فنحصل على:

$$\ddot{r}-\underbrace{\frac{v_0^2r_0^4}{r_0^2+z_0^2}}_{A(r_0,v_0,z_0)}\cdot\frac{1}{r^3}=-\underbrace{\frac{z_0r_0}{r_0^2+z_0^2}g}_{A(r_0,z_0,g)}\rightarrow(6)$$

5/ إذا كانت الحركة دائرية منتظمة فهذا يعني أن في كل لحظة $r(t)=r(0)$ ، كما أن $\left(\dot{\theta}(t)=C^{te}\right)$. العبارة (4) تتحول إلى:

$$\frac{v_1^2r_0^4}{r_0^2+z_0^2}\cdot\frac{1}{r_0^3}=\frac{z_0r_0}{r_0^2+z_0^2}g\Rightarrow\frac{v_1^2}{r_0^2+z_0^2}=\frac{z_0}{r_0^2+z_0^2}g$$

السرعة المطلوبة هي إذن: $\boxed{v_1=\sqrt{2gz_0}}$

6/ نقوم بعملية ضرب المعادلة (6) بـــ $2\dot{r}$ فيصبح لدينا: $2\dot{r}\ddot{r}+A\frac{2\dot{r}}{r^3}=2B\dot{r}$

تكاملها الأول ينتج عنه : $\int 2\dot{r}\ddot{r}d\dot{r}+\int A\frac{2\dot{r}}{r^3}d\dot{r}=\int 2B\dot{r}d\dot{r}\Rightarrow\dot{r}^2-\frac{A}{r^2}=2Br+C\rightarrow(7)$

للحصول على الثابت C نرجع إلى الشروط الابتدائية المشار إليها أعلاه $\left[t=0,\dot{r}(0)=0\right]$:

$$0-\frac{A}{r^2}=2Br+C\Rightarrow\boxed{C=-\frac{A}{r^2}-2Br}$$

في الأخير المعادلة (7) تصبح:

$$\boxed{\dot{r}^2=2A\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)+2B\left(r-r_0\right)}$$

<u>تمرين 20:</u>

نستعمل ترميز نيوتن للتعبير عن مركبات شعاع الموضع، السرعة و التسارع:

$$\vec{r}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ ,\ \vec{v}\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}\ ,\ \vec{a}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\end{pmatrix}$$

نحسب عبارة القوة:

$$\vec{v}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&-\vec{j}&\vec{k}\\\dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\B&0&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\B\dot{z}\\-B\dot{y}\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)=q\left(E\vec{k}+0\vec{i}+B\dot{z}\vec{j}-B\dot{y}\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}=q\left[0\vec{i}+B\dot{z}\vec{j}+\left(E-B\dot{y}\right)\vec{k}\right]}\rightarrow(1)$$

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك يمكن أن نكتب:

$$\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y+\vec{F}_z\Rightarrow\boxed{\vec{F}=m\ddot{x}+m\ddot{y}+m\ddot{z}}\rightarrow(2)$$

مطابقة المعادلتين (1) و (2) تنتج لنا جملة ثلاث معادلات تفاضلية:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = -q\left(E + B\dot{y}\right) \end{cases}$$

نأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية التالية:

$t = 0$:

$x(0) = 0 \ , y(0) = 0 \ , z(0) = 0 \ , \dot{x}(0) = 0 \ , \dot{y}(0) = 0 \ , \dot{z}(0) = 0$

و نكتب الجملة الجديدة المتكونة من معادلات تفاضلية:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C^{te} = \dot{x}(0) = 0 \rightarrow (3) \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} \Rightarrow \ddot{y} = \dfrac{q}{m}B\dot{z} \Rightarrow \dot{y} = \dfrac{q}{m}Bz \rightarrow (4) \\ m\ddot{z} = q\left(E - B\dot{y}\right) \Rightarrow \ddot{z} = \dfrac{q}{m}E - \dfrac{q}{m}B\dot{y} \rightarrow (5) \end{cases}$$

في المعادلة التفاضلية (5) نعوض $\dot{y}$ بقيمتها من المعادلة (4):

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \rightarrow (6) \\ \dot{y} = \omega z \rightarrow (7) \\ \ddot{z} + \left(B\dfrac{q}{m}\right)^2 z = \dfrac{q}{m}E \rightarrow (8) \end{cases}$$

نضع $\omega = B\dfrac{q}{m}$ حل المعادلة التفاضلية (8) هو:

$$z = \alpha \sin\omega t + \beta \cos\omega t + \frac{qE}{m}\left(\frac{m}{qB}\right)^2$$

$$\boxed{z = \alpha \sin\omega t + \beta \cos\omega t + \frac{mE}{qB^2}} \rightarrow (9)$$

نعين الثابتين α و β انطلاقا من الشروط الابتدائية باستعمال المعادلتين:

$$z = \alpha \sin\omega t + \beta \cos\omega t + \frac{mE}{qB^2}$$

$$\dot{z} = \alpha\omega \cos\omega t - \beta\omega \sin\omega t$$

$$t = 0 \ , \ z(0) = 0 \ , \ \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ , \ \beta = -\frac{mE}{qB^2}$$

في الأخير نتوصل إلى عبارة $z(t)$:

$$z(t) = -\frac{mE}{qB^2}\cos\omega t + \frac{mE}{qB^2} \Rightarrow z(t) = \underbrace{\frac{mE}{qB^2}}_{a}\Big(1 - \cos\underbrace{\omega t}_{\theta}\Big)$$

$$\boxed{z(t) = a\left(1 - \cos\theta\right)}$$

بقي لنا تحديد المعادلة $y(t)$. في المعادلة (7) نعوض z، ثم نكامل لنتوصل إلى عبارة $y(t)$:

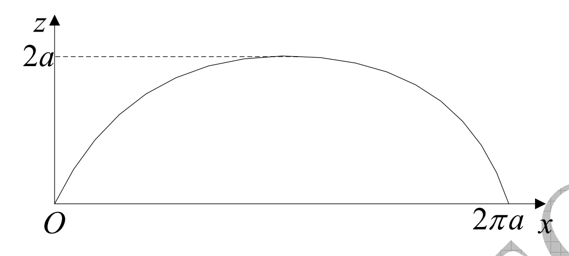
$$\dot{y} = \omega a\left(1-\cos\theta\right) \Rightarrow \dot{y} = \omega a - \omega a \cos \underbrace{\omega t}_{\theta}$$

$$y\left(t\right) = a\left(\omega t - \sin \omega t\right) \Rightarrow \boxed{y\left(t\right) = a\left(\theta - \sin\theta\right)}$$

و في النهاية:

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 0 \\ y\left(t\right) = a\left(\theta - \sin\theta\right) \\ z\left(t\right) = a\left(1-\cos\theta\right) \end{cases}$$

و هذه هي المعادلات الوسيطية المميّزة لمسار **دويري**.



VI/العــــمــــل و الــطـــاقـــة
TRAVAIL ET ENERGIE

1/العمل و الاستطاعة: (travail et puissance)

❖ الإستطاعة: (puissance)

✓ **تعريف:** لتكن M نقطة مادية سرعتها $\vec{v}$ بالنسبة لمرجع R. تعرف *إستطاعة* القوة $\vec{F}$ التي تخضع لها M في كل لحظة بالعبارة:

$$P = \vec{F}.\vec{v} \qquad (1.6)$$

$watt(W) \leftarrow P$

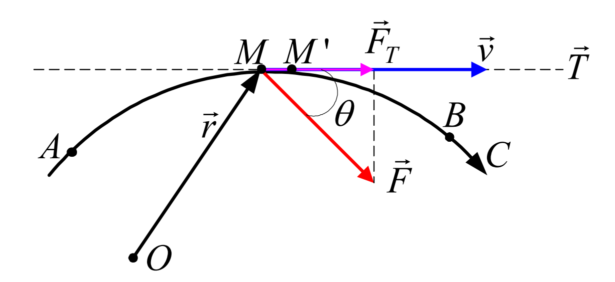
$N \leftarrow F$

$m.s^{-1} \leftarrow v$

❖ العمل:

✓ **تعريف:** عمل القوة $\vec{F}$ بين اللحظة t ، حين تكون النقطة المادية M في M ذات الموضع $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ، و اللحظة $t + dt$ ، حين تكون M في M' ذات الموضع $\overrightarrow{OM'} = \vec{r} + d\vec{r}$ ، هو المقدار المعبر عنه بالجول:

$$dW = P.dt \qquad (2.6)$$



الشكل 1.6

حسب تعريف السرعة لدينا:

$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = \vec{v}.dt$$

و هكذا نستنتج عبارة عمل القوة $\vec{F}$ من أجل الانتقال العنصري $d\vec{r}$:

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} \qquad (3.6)$$

نلاحظ أن العمل هو جداء سلمي لشعاعين.

$$dW = \|\vec{F}\|.\|d\vec{r}\|.\cos\theta \qquad (4.6)$$

نلاحظ أن: $F.\cos\theta = F_T$. إذا كان $\|d\vec{r}\| = ds$ نحصل على عبارة جديدة للعمل و هي:

$$dW = F_T.ds \qquad (5.6)$$

أي أن العمل يساوي جداء الانتقال العنصري في مركبة القوة وفق منحى الانتقال.

من اجل انتقال كلي من A (في اللحظة t_A) إلى B (في اللحظة t_B) على طول المنحنى C ، نحصل على عبارة العمل الكلي على شكل تكامل منحني:

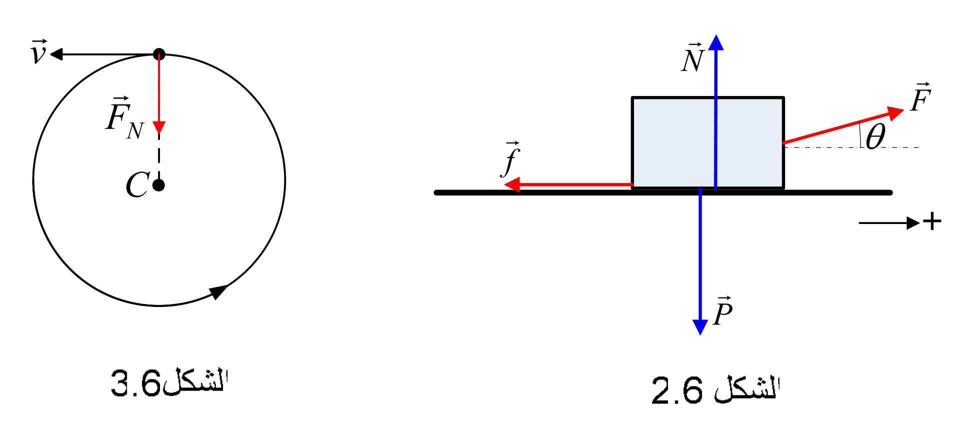
$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F_T.ds} \qquad (6.6)$$

- في الحالة الخاصة حيث تكون القوة $\vec{F}$ ثابتة الشدة و الإتجاه و الجسم ينتقل على مسار مستقيم فإن:

$$F = F_T \Rightarrow W = \int_A^B F.ds = F\int_A^B ds \Leftrightarrow \boxed{W = F.s} \qquad (7.6)$$

- القوى التي لا تعمل هي القوى العمودية على الانتقال $(\theta = \pi/2)$.

أمثلة: الجسم الممثل على الشكل 2.6 خاضع لأربعة قوى ثابتة و هو ينتقل على مستوي أفقي.



الشكل 3.6 الشكل 2.6

ليكن s إنتقال الجسم :

عمل القوة $\vec{F}$: $W_{\vec{F}} = F.s.\cos\theta$

عمل القوة المقاومة: $\vec{f}$ $W_{\vec{f}} = -f.s$

عمل الثقل $\vec{P}$: $W_{\vec{P}} = 0$

عمل القوة الناظمية $\vec{N}$: $W_{\vec{P}} = 0$

يكون عمل القوة الناظمية في الحركة الدائرية معدوما (الشكل 3.6).

- إذا كانت F_x, F_y, F_z هي المركبات المستطيلة للقوة $\vec{F}$ و dx, dy, dz المركبات المستطيلة لشعاع الإنتقال العنصري $d\vec{r}$ فإن:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz) \qquad (8.6)$$

- **حالة عدة قوى:** إذا كان الجسم خاضعا لعدة قوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 .... \vec{F}_n$, محصلتها $\vec{F}_R$ فإن العمل المنجز من قبل كل هذه القوى هو:

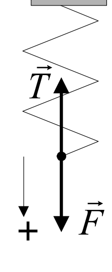
$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3 + ... + dW_n$$

$$dW = \vec{F}_1.d\vec{r} + \vec{F}_2.d\vec{r} + \vec{F}_3.d\vec{r} + ... + \vec{F}_n.d\vec{r} \qquad (9.6)$$

$$\boxed{dW = \vec{F}_R.d\vec{r}}$$

مثال 1.6: أحسب العمل اللازم لتمديد نابض مثبت شاقوليا كما في الشكل (4.6) بمقدار $3cm$ بدون أي تسارع علما أن ثابت مرونته $k = 50 N.m^{-1}$.

الإجابة:



الشكل 4.6

$$F = kx \rightarrow dW = \int_0^x kx.dx \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}k.x^2}$$

$$W = 2.25.10^{-2} J$$

مثال 2.6: قوة $F = 2t(N)$ تأثر على جسيمة كتلتها $2kg$. أحسب العمل المنجز من قبل هذه القوة خلال الثانية الأولى علما أن الجسيمة كانت ساكنة في البداية.

الإجابة:

ننطلق من عبارة العمل: $W = \int F.dx$

غير أن القوة معرفة بدلالة الزمن و ليس الانتقال. و لذا لا بد من التعبير عن الانتقال بدلالة الزمن. نحسب أولا السرعة بدلالة الزمن:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = 2t \Rightarrow v = \int_0^1 2.\frac{t}{m}.dt \Rightarrow v = \frac{1}{2}t^2 \ (m.s^{-1})$$

و الآن نعبّر عن الانتقال العنصري بدلالة الزمن:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t^2 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}t^2dt$$

نعود إلى عبارة العمل و نعوض dx بالعبارة التي توصلنا إليها:

$$W=\int_0^x F.dx=\int_0^1 2t.\frac{1}{2}t^2dt \Rightarrow \boxed{W=\frac{1}{4}t^4} \qquad \boxed{W=0.25J}$$

مثال3.6: تخضع جسيمة للقوة $\vec{F}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$. أحسب العمل المنجز من قبل القوة $\vec{F}$ عند ما تنتقل من النقطة $(0,0)$ حتى النقطة $(2,0)$ على طول المحور OX.

الإجابة:

من خلال المعطيات نلاحظ أن الجسيمة تنتقل وفق مسلك مواز للمحور OX و عليه فإن $y=0 \Rightarrow dy=0$.

و من ثمة يمكن حساب العمل المنجز بكل سهولة:

$$W=\int(F_x.dx+F_y.dy)=\int(2x.0dx+x^2.0) \Rightarrow \boxed{W=0}$$

و هذا كان مرتقبا لأن القوة عمودية على شعاع الإنتقال:

$$\left.\begin{array}{l} F=x^2.\vec{j} \\ d\vec{r}=dx.\vec{i} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{F}\perp d\vec{r} \Rightarrow W=0$$

2/الطاقة الحركية:(énergie cinétique)

رأينا سابقا أن $dW=F_Tds$. انطلاقا من هذه العبارة يمكننا استنتاج ما يلي:

$$dW=F_T.ds=m\frac{dv}{dt}ds \Rightarrow dW=m\frac{ds}{dt}dv \Rightarrow \boxed{dW=mvdv} \qquad (10.6)$$

نكامل عبارة العمل العنصري:

$$W=m\int_A^B vdv \Rightarrow \boxed{W=\tfrac{1}{2}mv_B^2-\tfrac{1}{2}mv_A^2} \qquad (11.6)$$

حيث v_a سرعة المتحرك في النقطة A و v_B سرعة المتحرك في النقطة B.

✓ **تعريف:** الطاقة الحركية لنقطة مادية كتلتها m و شدة سرعتها اللحظية v هي العبارة:

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (12.6)$$

و بما أن $p = mv$ يمكن كتابة :

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \qquad (13.6)$$

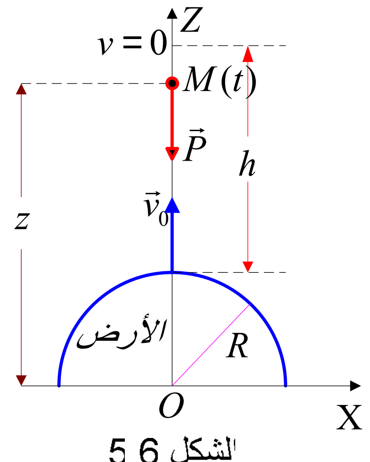
✓ **نظرية الطاقة الحركية:** (théorème de l'énergie cinétique)

النص:"التغير في الطاقة الحركية لنقطة مادية بين لحظتين يساوي عمل محصلة القوى المطبقة عليها بين تلكي اللحظتين".

$$W = \Delta E_c \Leftrightarrow \sum_i W_i = \Delta E_c \qquad (14.6)$$

مثال 4.6: ما هي السرعة الإبتدائية v_0 المتجهة شاقوليا نحو الأعلى التي تعطى لجسم لكي يبلغ علوا معينا h فوق سطح الأرض؟ (نهمل جميع الاحتكاكات).

الحل: القوة الوحيدة التي يخضع لها الجسم هي ثقله $\vec{P}$:



الشكل 5.6

على سطح الأرض: $P_0 = m.g_0 = G\dfrac{mM_T}{R^2}$

على البعد z من مركز الأرض: $P = mg = G\dfrac{mM_T}{r^2}$

نقسم المعادلتين طرف لطرف فنحصل على عبارة $\vec{g}$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow g = g_0\frac{R^2}{r^2} \quad ; \vec{g} = -g.\vec{k}$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية: $W = \Delta E_c$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} = \int_R^{R+h} \vec{P}.d\vec{z} = \int_R^{R+h} m\vec{g}.d\vec{z}$$

الجسم يبلغ أقصى علو له لما $v = 0$:

$$0-\frac{1}{2}mv_0^{\,2}=m\int_R^{R+h}-g_0\frac{R^2}{z^2}.dz\ =-g_0.R^2\left[-\frac{1}{z}\right]_R^{R+h}$$

$$v_0=g_0.R^2\left[-\frac{1}{z}\right]_R^{R+h}\Rightarrow\boxed{v_0=\sqrt{\frac{2g_0R.h}{R+h}}}$$

3/ القوة المحافظة أو القوى المشتقة من كمون:

(les forces conservatives ou dérivant d'un potentiel)

✓ **تعريف**: نقول عن قوة أنها محافظة أو قوة مشتقة من كمون إذ كان عملها مستقلا عن المسلك المتبع مهما كان الانتقال المحتمل بين نقطة الانطلاق و نقطة الوصول.

- إذا كان المسار C مغلقا فإن:

$$\forall C\ ,\ \boxed{W=\oint_C\vec{F}.d\vec{r}=0\Leftrightarrow W=0}\qquad(15.6)$$

مثال الثقل: في جملة إحداثيات كارتيزية حيث OZ هو الشاقول الموجه نحو الأعلى فإن

$$\vec{P}=\vec{F}=-mg\vec{k}\qquad(16.6)$$

باستعمال عبارة الانتقال العنصري بالاحداثيات الكارتيزية

$$d\vec{r}=dx.\vec{i}+dy.\vec{j}+dz.\vec{k}$$

يمكن استنتاج:

$$dW=\vec{F}.d\vec{r}=-mgdz$$

Z k O g P

الشكل 6.6

بمكاملة هذه المعادلة نرى أن العمل من أجل انتقال بين نقطتين A و B لا يتعلق بالمسلك المتبع و إنما بعلوهما فقط:

$$W=-\int_{z_1}^{z_2}mgdz\Rightarrow W=-mg(z_2-z_1)\Rightarrow\boxed{W=mg(z_1-z_2)}$$

إذا كانت النقطتان في نفس المستوي فإن العمل المنجز من قبل الثقل معدوم مما يدل على أن الثقل قوة محافظة. $z_1=z_2\Rightarrow W=0$

و هكذا تبين لنا أن الثقل قوة محافظة.

مثال 5.6: تنتقل القوة $\vec{F}=(x^2-y^2).\vec{i}+3xy.\vec{j}$ من النقطة $A(0,0)$ إلى النقطة $B(2,4)$ وفق كل من المسارين $y=2x$ و $y=x^2$. هل هذه القوة محافظة ؟

الإجابة: **وفق المسلك الأول** $y=2x$:

$$y=2x\Rightarrow \vec{F}=-3x^2.\vec{i}+6x^2.\vec{j}$$

$$dy=2dx\ ;\ d\vec{r}=dx.\vec{i}+dy.\vec{j}\Rightarrow d\vec{r}=dx.\vec{i}+2dx.\vec{j}$$

$$W=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int(F_x.dx+F_y.dy)=\int(-3x^2.dx+12x^2)dx$$

$$W=\int_0^2 9x^2dx=3x^3\Big|_0^2;\quad \boxed{W=24J}$$

وفق المسلك الثاني: $y=x^2$:

$$y=x^2\Rightarrow\vec{F}=(x^2-x^4).\vec{i}+3x^3.\vec{j}$$

$$dy=2xdx\ ;\ d\vec{r}=dx.\vec{i}+dy.\vec{j}\Rightarrow d\vec{r}=dx.\vec{i}+2xdx.\vec{j}$$

$$W=\int\vec{F}.d\vec{r}=\int(F_x.dx+F_y).dy=\int\left[(x^2-x^4)dx+6x^4dx\right]$$

$$W=\int_0^2(x^2+5x^4)dx=x^5+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2\Rightarrow\quad\boxed{W=34.6J}$$

العملان غير متساويين و عليه فإن القوة $\vec{F}$ في هذه الحالة غير محافظة.

4/الطاقة الكامنة: (énergie potentielle)

✓ **تعريف:** الطاقة الكامنة هي دالة إحداثيات، بحيث يكون التكامل بين قيمتيها المأخوذتين عند الانطلاق و الوصول يساوي العمل المقدم للجسيمة لنقلها من موضعها الابتدائي إلى موضعها النهائي.

إذا كانت $\vec{F}$ قوة مشتقة من كمون فإن :

$$\boxed{W=\int_A^B\vec{F}.d\vec{r}=E_{p_A}-E_{p_B}}\qquad(17.6)$$

الطاقة الكامنة منسوبة دائما إلى مرجع نتّخذه كمبدإ لحسابها $(E_p=0)$. دالة الطاقة الكامنة E_p معرّفة بثابت إضافي تقريبي.

❖ **العلاقة بين عنصري العمل و الطاقة الكامنة:**

(relation entre différentielles du travail et de l'énergie potentielle)

إذا اعتبرنا الدالة $E_p(z)=mgz$ فإن تفاضلها هو :

$$dE_p(z)=E_p^{'}(z).dz \Rightarrow dE_p(z)=mgdz$$

رأينا سابقا في تناولنا لمثال حساب عمل الثقل أن $dW=-mgdz$. بمطابقة العبرتين العنصريتين نصل إلى النتيجة:

$$\boxed{dW=-dE_p(z) \quad \Leftrightarrow \quad dE_p(z)=-dW} \qquad (18.6)$$

❖ الطاقة الكامنة لبعض حقول القوة:

(énergie potentielle de quelques champs de force)

- ***جسيمة في الحقل المنتظم للجاذبية الأرضية:***

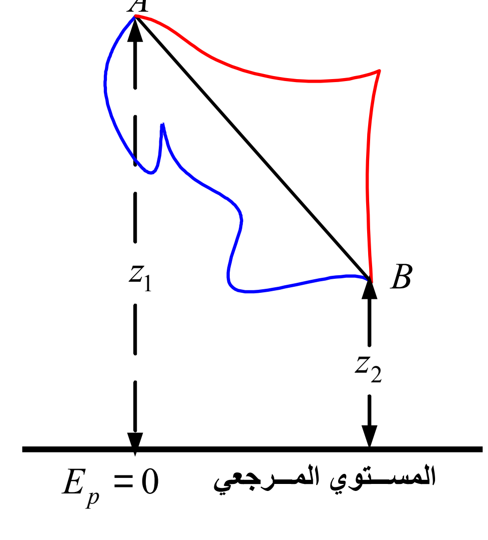
(particule dans le champ de pesanteur terrestre uniforme)

إذا كان z هو العلو ، محسوبا من سطح الأرض المأخوذ كمبدإ للطاقة الكامنة ، فإن الطاقة الكامنة للجسيمة بالنسبة لسطح الأرض هي:

$$dE_p=-dW \Rightarrow \boxed{E_p=mgz} \qquad (19.6)$$

و في الحالة العامة إذا انتقلت الجسيمة بين مستويين، فإن الطاقة الكامنة، ومهما كان المسار المتبع تحسب بالعبارة:

$$E_p=mg(z_1-z_2) \quad \left| \begin{array}{l} z_1>z_2 \Rightarrow E_p>0 \\ z_1<z_2 \Rightarrow E_p<0 \end{array} \right.$$



الشكل 7.6

و بصفة أدق فإن الطاقة الكامنة المحسوبة هي دائما تغير لقيمتها بين نقطتين.

- ***جسيمة خاضعة لقوة مرنة:*** (particule soumise à une force élastique)

إذا كانت الجسيمة مثبتة في نابض ، ثابت مرونته k و طوله و هو فارغ l_0 و l طوله و هو محمل بالجسيمة ، فإن الطاقة الكامنة لهذه الجملة تحسب كما يلي:

$$dE_p=-dW \quad ; \quad E_p=-\int_0^x -kxdx \Rightarrow \boxed{E_p=\tfrac{1}{2}k.x^2=\tfrac{1}{2}k(l-l_0)^2} \qquad (20.6)$$

▪ ***جسيمة في حقل كهروساكن***: (particule dans un champ électrostatique)

نصادف في درس الكهرومغناطيسية أن الحقل الكهروساكن $\vec{E}$ النابع عن شحنة ساكنة Q والموجودة في المبدإ O للإحداثيات $(\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r)$ معرف بالعبارة:

$$\boxed{\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}.\vec{u}_r} \qquad (21.6)$$

بالنسبة لشحنة q متواجدة في هذا الحقل فإنها تخضع للقوة:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r^2}.\vec{u}$$

من السهل التحقق من أن القوة الكهروساكنة مشتقة من الطاقة الكامنة ذات العبارة:

$$\boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r}} \qquad (22.6)$$

و في الحالة العامة فإن الطاقة الكامنة لشحنة q موجودة في حقل كهروساكن في نقطة (M) حيث الكمون الكهروساكن هو $V(M)$ هي الدالة $E_p(M) = E_p(x,y,z)$ المعطاة على الشكل:

$$\left.\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.q}{r} \\ V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E_p = q.V} \qquad (23.6)$$

▪ ***جسيمة في حقل نقطة كتلتها*** M: (particule dans un champ d'un point de masse M)

إذا كان $\vec{g} = -g\vec{k}$ و بالمقارنة مع الحقل الكهروساكن نتوصل إلى عبارة الطاقة الكامنة للجسيمة الموجودة في حقل الجاذبية المنتظم بجوار الأرض :

$$\left.\begin{aligned} &Q \to M \\ &q \to m \\ &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E_p = -G\frac{mM}{r}} \qquad (24.6)$$

وبالمقارنة دائما مع الحقل الكهربائي يمكن كتابة العبارة (24.6) على الشكل:

$$\boxed{E_p = mV} \quad (25.6)$$

$$\boxed{V = -G\frac{M}{r}} \quad (26.6)$$

V: يرمز هنا إلى كمون الجاذبية في النقطة التي توجد فيها الجسيمة m.

5/ عبارة حقل القوة المحافظة انطلاقا من الطاقة الكامنة التي تشتق منها :

(expression du champ de force conservative à partir de l'énergie potentielle dont il dérive)

لقد شرحنا في الفقرة المتعلقة بالعمل أن العبارة $F.\cos\theta$ هي مركبة القوة وفق منحى الانتقال ds ؛ و عليه ، فإذا كنا نعرف $E_p(x,y,z)$ يمكننا الحصول على مركبة $\vec{F}$ وفق أي جهة و ذلك بحساب المشتقة $-dE_p/ds$ و التي تسمى *المشتقة الإتجاهية* للدالة E_p.

تبعا لما سابق يمكن أن نكتب الآن:

$$\left.\begin{array}{l} dW = -dE_p \\ dW = \vec{F}.d\vec{r} \\ d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k} \\ \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F} + \vec{F}_z \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{dE_p = -(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)} \quad (27.6)$$

علما أن $E_p(x,y,z)$ هي دالة ذات ثلاث متغيرات فإن تفاضلها يكتب:

$$\boxed{dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz} \quad (28.6)$$

بمطابقة العبارتين (27.6) و (28.6) نتوصل إلى الإحداثيات الكارتيزية لقوة تابعة للكمون $E_p(x,y,z)$:

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \ ; \ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \ ; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}} \quad (29.6)$$

و بعبارة مختصرة يمكن كتابة:

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -\vec{\nabla}E_p} \quad (30.6)$$

❖ كيف نبرهن رياضيا أن قوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون معطى؟

✓ ما دامت العبارة (30.6) محققة في حالة القوى المحافظة فيمكننا التأكد من أن دوران تدرج الكمون E_p معدوم مما يؤدي لانعدام دوران القوة $\vec{F}$:

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F} = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}E_p) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}} \qquad (31.6)$$

الحساب يؤدي إلى العبارة:

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = (\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y})\vec{i} - (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x})\vec{k} = \vec{0}$$

يكفي إذن أن نتحقق من المعادلات التالية لنثبت أن القوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون:

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}} \qquad (32.6)$$

مثال 6.6: ليكن الكمون $E_p = 2x^2 - xy + yz$.

أوجد عبارة القوة $\vec{F}$ في جملة الإحداثيات الكارتيزية. هل القوة مشتقة من كمون ؟

الحل: نبحث عن مركبات القوة و ذلك باستغلال العبارة (29.6) :

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 4x-y \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -x+z \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = y$$

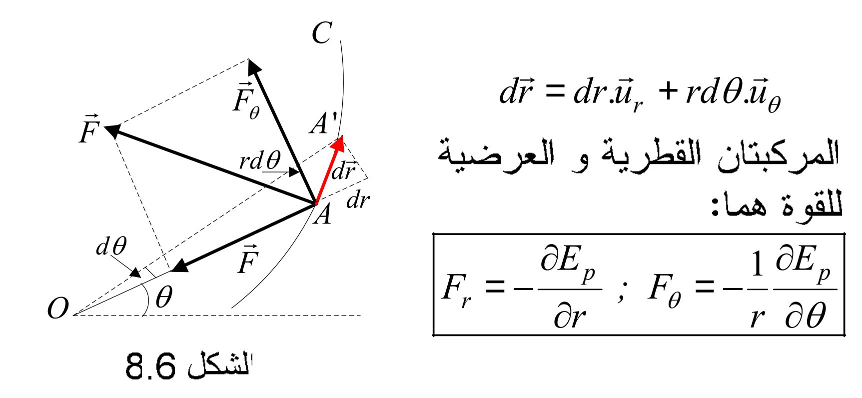
و منه فإن العبارة الشعاعية للقوة هي: $\vec{F} = (4x-y).\vec{i} + (x+z).\vec{j} + y.\vec{k}$

نتحقق الآن من أن $\vec{F}$ مشتقة من الكمون $E_p(x,y,z)$ أي $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow -1 = -1; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \Rightarrow 1 = 1; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \Rightarrow 0 = 0$$

بالفعل القوة مشتقة من كمون.

إذا كانت الحركة مستوية و باستعمال الإحداثيتين القطبيتين و θ ، فإن الإنتقال وفق شعاع نصف القطر ⁻ يساوي d و الإنتقال العمودي يساوي $rd\theta$ (الشكل 8.6).



الشكل 8.6

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta$$

المركبتان القطرية و العرضية للقوة هما:

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \; ; \; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta} \qquad (33.6)$$

ولختام هذه الفقرة لا بأس أن نعطي بدون براهين مركبات القوة :

- **بالإحداثيات الأسطوانية** (r,θ,z) حيث الإنتقال العنصري هو

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + rd\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{k}$$

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} ; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta} ; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad (34.6)$$

- **بالإحداثيات الكروية** (r,θ,φ) حيث الإنتقال العنصري هو

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + r\sin\varphi d\theta.\vec{u}_\theta + rd\varphi.\vec{u}_\varphi$$

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} ; F_\theta = -\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial E_p}{\partial \theta} ; F_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \qquad (35.6)$$

6/ الطاقة الميكانيكية: (énergie mécanique)

✓ **تعريف:** الطاقة الميكانيكية لنقطة مادية في لحظة محددة تساوي مجموع الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة :

$$E_M = E_c + E_p \Leftrightarrow E_M = E_c + E_p(x,y,z) \qquad (36.6)$$

مثلان:

- الطاقة الميكانيكية لجملة مكونة من نابض ثابت مرونته k و استطالته $l - l_0 = x$ في اللحظة t تحت تأثير جسيمة كتلتها m و سرعتها اللحظية v هي:

$$E_M = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

- في حالة سقوط جسم : $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

❖ **مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية:** (principe de la conservation de l'énergie mécanique)

في حقل قوة محافظة (أي المشتقة من كمون) الطاقة الميكانيكية محفوظة خلال الزمن

$$E_M = E_c + E_p = \mathrm{C^{te}} \qquad (37.6)$$
؛ C^{te} : ثابت

أي أن تغيرها معدوم: $\Delta E_M = 0$ أو بعبارة أخرى فإن تغير الطاقة الحركية يساوي تغير الطاقة الكامنة $\Delta E_c = \Delta E_p$.

أو بعبارة أخرى: إذا كانت الجملة معزولة ميكانيكيا فإن طاقتها الميكانيكية محفوظة.

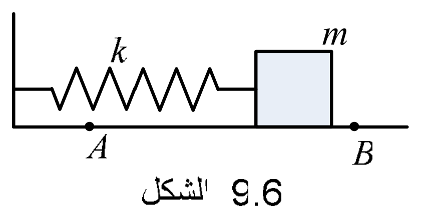
في حالة وجود احتكاكات فإن التغير في الطاقة الميكانيكية يساوي مجموع أعمال قوى الإحتكاك $(\sum W_{frott})$:

$$\Delta E_M = \sum W_{frott} \qquad (38.7)$$

- **حالة جسيمة في حقل قوة مرنة:**

(cas d'une particule dans un champ de force élastique)

يمثل الشكل 9.6 جملة ميكانيكية متكونة من جسم كتلة (m) ملتحم بنابض كتلته مهملة و ثابت مرونته (k) و طوله وهو فارغ (l_0) .



الشكل 9.6

في كل لحظة الجسم خاضع لقوة إرجاع $\vec{F} = -kx.\vec{u}$ و $x = l - l_0$ حيث l طول النابض في لحظة ما خلال انتقال الجسم.

عند انتقال الجسم من النقطة A إلى النقطة B يمكن كتابة:

$$\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B F_x.dx = -k\int_A^B x.dx$$

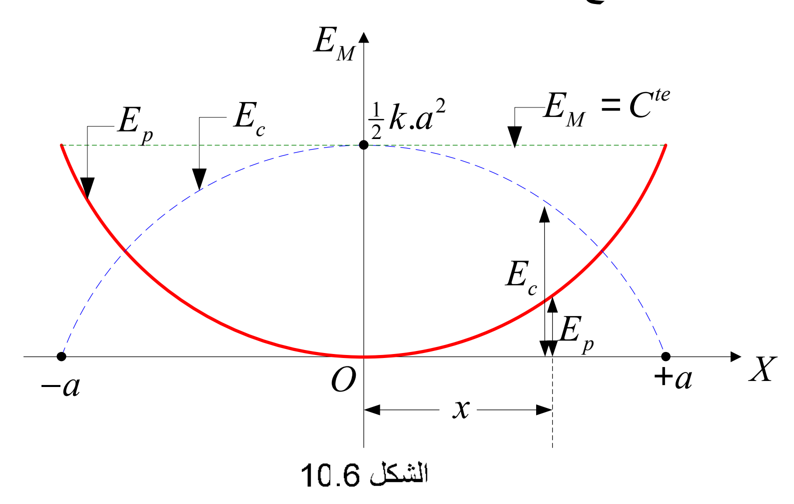
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}k.x_A^2 - \frac{1}{2}k.x_B^2 = \Delta E_p \qquad (39.6)$$

حسب مبدإ انحفاظ الطاقة الميكانيكية نكتب:

$$E_{M,A}=E_{M,B}\Leftrightarrow\frac{1}{2}k.x_A^{\;2}+\frac{1}{2}m.v_A^{\;2}=\frac{1}{2}k.x_B^{\;2}+\frac{1}{2}m.v_B^{\;2}=\mathrm{C}^{te}$$

نضغط على الجسم أفقيا بمقدار $(x=-a)$ انطلاقا من موضع توازنه $(x=0)$ ثم نتركه لشأنه بدون سرعة ابتدائية. يهتز الجسم بحركة مستقيمة جيبية بين الوضعين الحديين $x=-a$ و $x=+a$.

يمثل الشكل 10.6 تغيرات الطاقة الكامنة بدلالة **<u>استطالة</u>** النابض $(x=l-l_0)$. مثلنا على نفس الشكل بخط متقطع تغيرات الطاقة الحركية.



الشكل 10.6

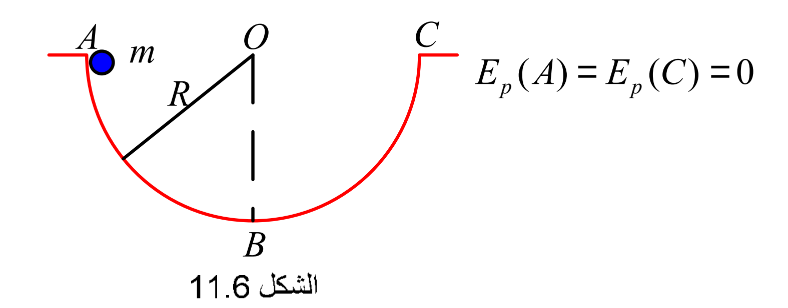
نلاحظ أن في كل لحظة

$$\mathrm{E_c}+E_p=\frac{1}{2}\mathrm{ka}^2=C^{te}\qquad(40.6)$$

ما تفتقده الجملة على شكل طاقة كامنة تكتسبه على شكل طاقة حركية و العكس صحيح.

<u>مثال7.6</u>: نترك كرية ، بسرعة ابتدائية $v_A=0$ ، كتلتها $m=1g$ من نقطة A تقع بداخل كرة نصف قطرها $R=1,25m$ لتصل إلى النقطة B بسرعة $v'_B=4ms^{-1}$.
(الشكل11.6).

أثبت أن هذه الكرية تخضع لقوى احتكاك و قدر عمل هذه القوى. نأخذ $g=10ms^{-2}$.



الشكل 11.6

الحل: نطبق بدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية:

- **في غياب الإحتكاكات:** $\Delta E_M = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^{\,2} - mgR = 0 \Rightarrow v_B = 5ms^{-1}$

نلاحظ أن الشدة النظرية للسرعة أكبر من شدتها التجريبية: $v_B > v'_B$ هذا ما يؤكد وجود احتكاكات.

- **بوجود احتكاكات:** $\Delta E_M = \sum W_{frott}$ و عليه:

$$\Delta E_M = \sum W_{frott} = \frac{1}{2}mv'^{\,2}_B - mgR \Rightarrow \boxed{\sum W_{frott} = -4.5\times10^{-3}J < 0}$$

❖ **الهزاز التوافقي البسيط:** (oscillateur harmonique simple)

✓**تعريف:** الهزاز التوافقي البسيط هو كل جملة تقوم بحركة دورية حول موضع توازن مستقر ولا تخضع لأي تخامد (مثل الإحتكاكات) و لا لأي إثارة .

الحركة محكومة بالمعادلة التفاضلية الخطية: $\ddot{x} + \omega_0 .x = 0$

نعرف أن الحل العام لهذه المعادلة هو من الشكل: $x = a\cos(\omega t + \varphi)$

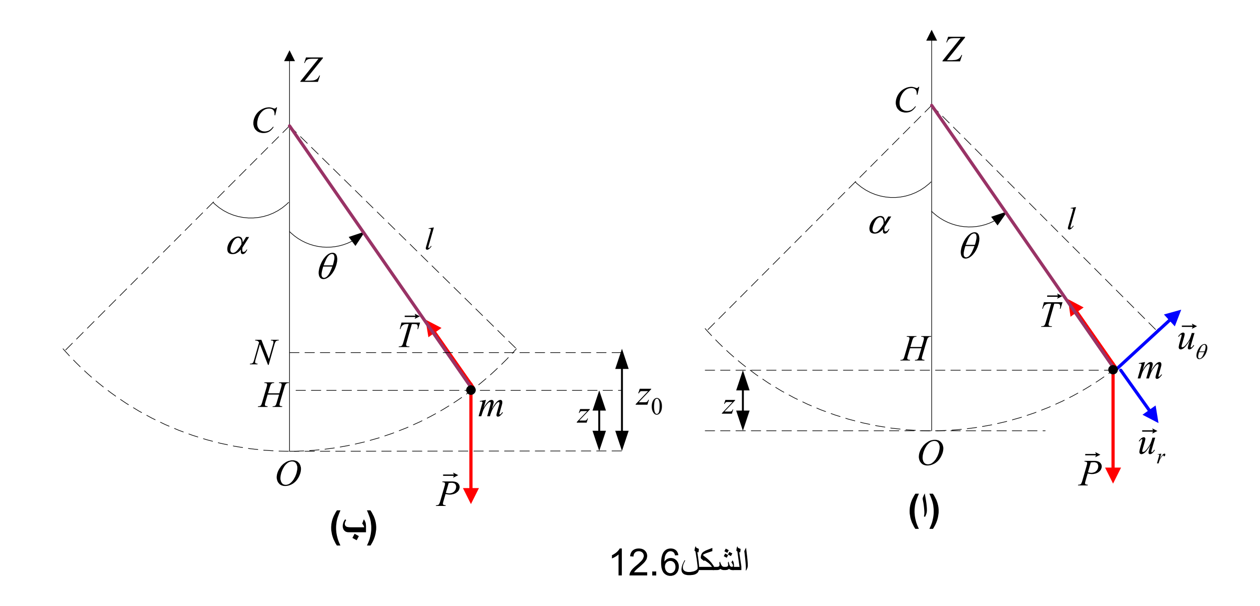
✓ **طاقة الهزاز:** (énergie de l'oscillateur)

يمثل الشكل 12.6 (ا) نواسا بسيطا (الخيط عديم الإمتطاط و طوله l). تخضع الكتلة m للقوتين ، ثقلها $\vec{P}$ و التوتر $\vec{T}$ للخيط.

الثقل مشتق من كمون بينما عمل التوتر $\vec{T}$ معدوم بما أن حامله عمودي على المسار في كل لحظة. نأخذ كمبدإ للطاقة الكامنة المستوى الأفقي المار من النقطة O. من أجل الوضع المناسب للزاوية θ:

$$E_p = mgz = mg(OH) = mg(CO - CH) = mgl(1-\cos\alpha)$$

عبارة السرعة الدائرية المماسة للمسار هي: $\vec{v} = l\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$



الشكل12.6

يمكننا الآن حساب الطاقة الميكانيكية للنواس (أو ما يسمى بالتكامل الأول للطاقة) :

$$\boxed{E_M = E_p + E_c = mgl(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = C^{te}} \qquad (41.6)$$

نضع $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$ فتصبح عبارة الطاقة الميكانيكية على الشكل التالي:

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + 2\omega_0{}^2(1-\cos\theta) = K} \qquad (42.6)$$

حيث K ثابت تحدده الشروط الإبتدائية. فمثلا إذا أخذنا $\dot{\theta}_0 = 0$ من أجل $\theta_0 = \alpha$، في هذه الحالة و حسب الشكل 11.6 (ب) :

$$\Delta E_M = 0 \Rightarrow \Delta E_p = \Delta E_c \Rightarrow mg(z_0 - z) = \frac{1}{2}m\ddot{\theta}^2$$

$$mgl(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}m\ddot{\theta}^2$$

وفي مثل هذه الشروط فإن المعادلة (42.6) تصبح:

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + 2\omega_0{}^2(\cos\alpha - \cos\theta) = 0} \qquad (43.6)$$

✓ **معادلة الحركة:** (équation du mouvement)

معادلة الحركة هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية. نحصل عليها باشتقاق المعادلة السابقة (43.6) بالنسبة للزمن:

$$\boxed{\ddot{\theta}^2 + \omega_0{}^2\sin\theta = 0} \qquad (44.6)$$

من أجل اهتزازات **صغيرة السعة**($\theta \geq 10° \Leftarrow \sin\theta \simeq \theta_{(rad)}$) فإن المعادلة تصبح :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^{\ 2}\theta = 0} \qquad (45.6)$$

الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$\boxed{\theta = \alpha\cos(\omega t + \varphi)} \qquad (46.6)$$

أي أن الحركة دورانية جيبية نبضها ω_0 و دورها :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad (47.6)$$

يمكننا الوصول إلى المعادلة (44.6) انطلاقا من قانون التحريك $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ و ذلك بإسقاط هذه العبارة الأخيرة على المنحى القطري:

$$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$

و من هذا المثال نستنتج ملاحظة عامة:

حين نستنتج معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى (E)، فهذه الأخيرة ليست مستقلة عن المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية (D) و التي تعبر عن قانون التحريك. نقول في هذه الحالة أن (E) هي التكامل الأول للمعادلات (D) (أي (D) هي المشتقات الأولى للمعادلة (E)).

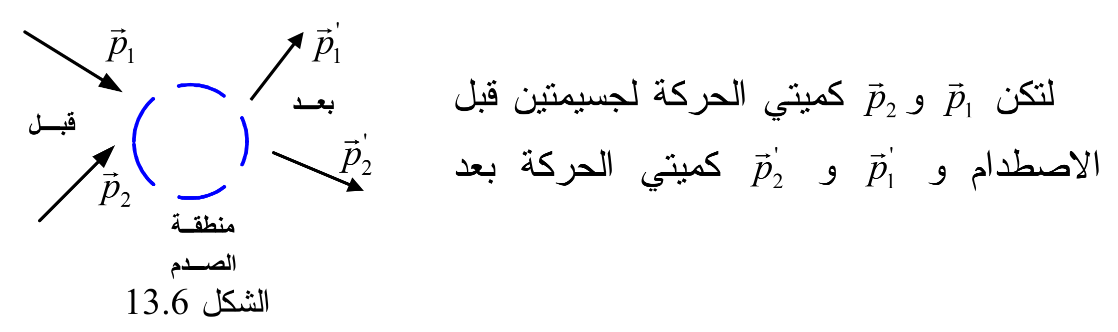
في الحالة التي درسنها، المعادلة (43.6) هي التكامل الأول للمعادلة (44.6).

7/ تصادم الجسيمات: (collision de particules)

❖ إنحفاظ كمية الحركة: (conservation de la quantité de mouvement)

نقول عن جملة أنها تلقت صدمة إذا طرأت على سرعات عناصرها تغيرات معتبرة بين اللحظتين ، ما قبل و ما بعد الصدمة ، حيث يحدث تبادل في كمية الحركة و الطاقة بين مختلف العناصر.

لتكن $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ كميتي الحركة لجسيمتين قبل الاصطدام و $\vec{p}_1^{\,'}$ و $\vec{p}_2^{\,'}$ كميتي الحركة بعد



الشكل 13.6

الاصطدام. الجملة معزولة. التأثيرات المتبادلة

بين الجسيمتين ذاتي الكتلتين m_1 و m_2 تحدث

في منطقة محددة من الفراغ و جد صغيرة و لذا نقول أن الصدم نقطي.

بما أن الجملة معزولة فإن كمية الحركة و الطاقة الحركية محفوظتان. يمكن كتابة:

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{'} + \vec{p}_2^{'} = Cte \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{0}} \qquad (48.6)$$

$$\boxed{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2 = m_1.\vec{v}_1^{'} + m_2.\vec{v}_2^{'}} \qquad (49.6)$$

<u>لاحظ الطابع الشعاعي للمعادلتين.</u>

<u>الصدم المرن</u>:(choc élastique)

يكون الصدم بين جسيمتين مرنا إذا بقيت الطاقة الحركية الكلية E_c للجملة محفوظة أثناء التصادم. الجسيمتان لا تتحدان بعد الصدم.

إذ رمزنا إلى الطاقة الحركية قبل الصدم بــ E_c و بــ $E_c^{'}$ بعد الصدم و بتذكر العلاقة $E_c = \dfrac{p^2}{2m}$ يمكن كتابة:

$$\boxed{E_c = E_c^{'} \Leftrightarrow \Delta E_c = 0} \qquad (50.6)$$

$$\boxed{\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1^{'2}}{2m_1} + \frac{p_2^{'2}}{2m_2}} \qquad (51.6)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2.v_2^{'2}} \qquad (52.6)$$

<u>لاحظ الطابع السلمي للمعادلات. المعادلتان (51.6) و (52.6) كافيتان لحل أي مسألة متعلقة بالتصادم.</u>

<u>مثال 8.6</u> :

قذيفة كتلتها $800g$ تتحرك وفق خط مستقيم أفقي بسرعة $1ms^{-1}$ لتصيب هدفا ساكنا كتلته $800g$. يتحرك الهدف المصاب وفق جهة تصنع مع الأفق $-30°$.

ا/ حدد جهة و شدة سرعة القذيفة بعد الإصطدام.

ب/ حدد شدة سرعة الهدف بعد الإصطدام.

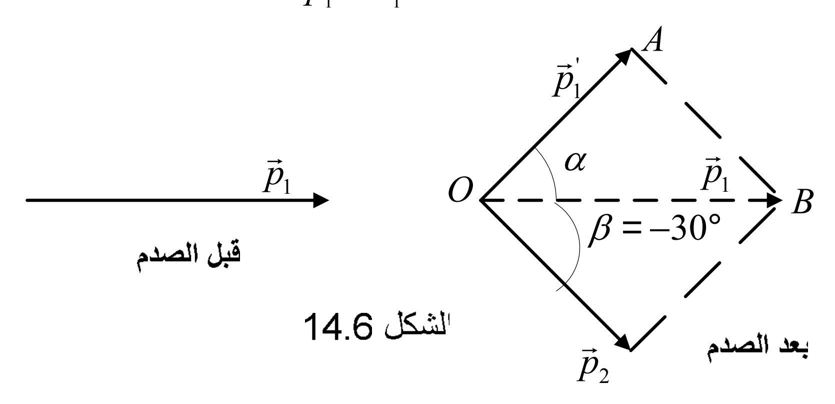
<u>الإجابة</u>:

ا/ تحديد جهة سرعة القذيفة و حساب شدتها: أنظر الشكل(14.6)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{p_1^2}{2m_1}=\dfrac{p_1'^2}{2m_1}+\dfrac{p^2}{2m_2}\\ m_1=m_2=m\end{array}\right| \Rightarrow p_1^2=p_2'^2+p^2$$

إذن المثلث OAB قائم ⇐ متوازي الأضلاع مستطيل: $\boxed{\alpha=60°} \Leftarrow \alpha+\beta=90°$

$$\cos\alpha=\frac{p_1'}{p_1}=\frac{v_1'}{v_1}\Rightarrow \boxed{v_1'=0.50ms^{-1}}$$



الشكل 14.6

ب/ حساب شدة سرعة الهدف:

$$\cos(-30°)=\frac{mv}{mv_1}=\frac{v}{v_1}\Rightarrow \boxed{v=0.87ms^{-1}}$$

❖ **الصدم اللين:** (choc mou)

يكون الصدم بين جسيمتين غير متحدتين لينا إذا اتحدتا بعد الاصطدام لتكونا جملة واحدة فتصبح لهما نفس السرعة.

في هذه الحالة: إذا كانت $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ كميتي الحركة لجسيمتين منفصلتين قبل الصدم و كانت $\vec{p}'$ كمية الحركة للجسيمتين متحدتين بعد الصدم يمكننا كتابة:

$$\boxed{\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}'=Cte\Rightarrow \Delta\vec{p}=\vec{0}} \quad (53.6)$$

$$\boxed{\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}=\frac{p'^2}{2(m_1+m_2)}} \quad (54.6)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1.v_1^2+\frac{1}{2}m_2.v_2^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2} \quad (55.6)$$

مثال 9.6: تتحرك جسيمة كتلتها $5kg$ بسرعة $20ms^{-1}$ لتصطدم عموديا مع جسيمة كتلتها $6kg$ كانت تتحرك بسرعة $15ms^{-1}$. إذا كان الاصطدام لينا:

ا/ ما كمية الحركة للجملة ؟

ب/ أحسب سرعة الجسيمتين بعد الاصطدام.

الإجابة: ا/ $134.5 kg.m.s^{-1}$ ب/ $12.23 m.s^{-1}$

8/ مناقشة منحنيات الطاقة الكامنة: (discussion des courbes d'énergie potentielle)

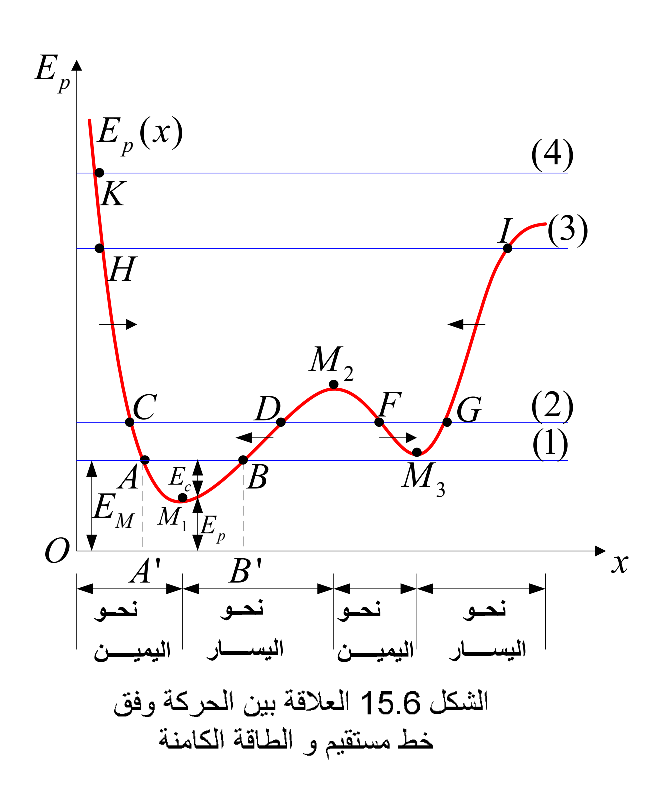
مثلنا على الشكل 15.6 منحنا كيفيا في حالة حركة أحادية البعد (تتم وفق مستقيم).

تكتب عبارة شدة القوة $\vec{F}$ على الشكل:

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

غير أن $\frac{dE_p}{dx}$ تمثل ميل المنحنى $E_p(x)$. الميل يكون موجبا حين يكون المنحنى متزايدا و موجها نحو الأعلى و يكون سالبا حين يكون المنحنى متناقصا و موجها نحو الأسفل. و هكذا فإن القوة $\vec{F}$ (و هي التي تكون إشارتها معاكسة للميل) تكون سالبة أو موجهة نحو اليسار حين تكون الطاقة الكامنة متزايدة و تكون موجبة و موجهة نحو اليمين حين تكون الطاقة الكامنة متناقصة.

وضحنا هذه الحالة على الشكل 15.6 بسهام أفقية و بمناطق أسفل الشكل.



الشكل 15.6 العلاقة بين الحركة وفق خط مستقيم و الطاقة الكامنة

تكون الحركة ممكنة إذا استوفي الشرط: $E_c = E_M - E_p > 0$. تمثل المستقيمات الأفقية الطاقة الميكانيكية في حالات مختلفة.

- ✓ الحالة الأولى: الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم (1) الذي يقطع المنحنى $E_p(x)$ في نقطتين A وB. الجسيمة تهتز بين الفاصلتين x_A و x_B؛ غير أن حركتها غير ممكنة على يمين B و على يسار A لأن $E_c = E_M - E_p < 0$ وهذا مستحيل.
- ✓ الحالة الثانية: الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم (2) الذي يقطع المنحنى $E_p(x)$ في أربع نقاط C,D,F,G. هناك منطقتان ممكنتان للحركة الاهتزازية للجسيمة: بين الفاصلتين x_C و x_D ، وبين الفاصلتين x_F و x_G؛ غير أن الجسيمة لا يمكنها الاهتزاز إلا في إحدى المنطقتين و لا تستطيع القفز من منطقة إلى أخرى لأنه يجب عليها قطع المنطقة DF و هذا مستحيل (لأن في هذه المنطقة الطاقة الحركية سالبة $E_c = E_M - E_p < 0$) المنطقتان حيث الحركة ممكنة معزولتان بما نسميه **حاجزا للكمون.**

- ✓ الحالة الثالثة: الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم(3). الحركة تتم بين النقطتين H,I.
- ✓ الحالة الرابعة: الطاقة الميكانيكية الموافقة للمستقيم (4).الحركة لم تعد اهتزازية و الجسيمة تنتقل من K إلى ما لا نهاية.

❖ مواضع التوازن:(positions d'équilibre)

حين تكون $\frac{dE_p}{dx} = 0$ و حتما $F = 0$ فإن الطاقة الكامنة تكون أعظمية أو أصغرية كما في النقاط M_1 , M_2 , M_3 . هذه المواضع هي **مواضع توازن.**

- **حيث تكون** $E_p(x)$ **أصغرية** :

التوازن مستقر (إذا تحركت الجسيمة قليلا، كما في M_1 , M_3 ، يمينا أو يسارا فإن قوة تؤثر عليها لإرجاعها إلى موضع توازنها).

- **حيث تكون** $E_p(x)$ **أعظمية**: **التوازن قلق أي غير مستقر** (إذا تحركت الجسيمة قليلا، كما في M_2 ، فإن قوة تؤثر عليها لإبعادها عن موضع توازنها).

- النقاط A,B,C,D,F,G,H,I تسمى بنقاط التوقف. في هذه النقاط تتوقف الجسيمة أو تغير من اتجاه حركتها.

9/ القوى الغير محافظة (أو الغير مشتقة من كمون)

(forces ne dérivant pas d'un potentiel)

في الطبيعة هناك قوى غير محافظة. قوة الإحتكاك مثال على ذلك. فالإحتكاك الإنزلاقي يعاكس دائما الانتقال و عمله يتعلق بالمسلك المتبع حتى لو كان المسار مغلقا فإن العمل ليس معدوما و المعادلة (30.6) غير صالحة.

و كذلك الأمر بالنسبة للإحتكاك في الموائع و الذي يتعاكس مع السرعة التي يتعلق بها بينما هو مستقل عن الموضع.

يمكن لجسيمة أن تكون خاضعة لقوى محافظة و لقوى غير محافظة في آن واحد.

أمثلة:

- ✓ **جسيمة تسقط في مائع:** فهي خاضعة لثقلها $\vec{P}$ المشتق من كمون و قوة الإحتكاك الغير مشتقة من كمون.
- ✓ **في النواس المرن** : الجسيمة خاضعة لقوة الإرجاع $\vec{F}=-kx.\vec{i}$ و هي محافظة و تخضع كذلك لقوة الإحتكاك الإنزلاقي $\vec{F}'=-C\vec{v}$ الغير محافظة علما أن عمل هذه الأخيرة:

$$W'=\vec{F}'d\vec{r}=-C.\dot{x}.dx \Rightarrow W'=-C.\dot{x}^2.dt<0$$

مدلول الإشارة السالبة هو أن الإحتكاكات تمتص الطاقة من الجملة و هذا ما يفسر تخامد حركتها.

EXERCICES ** تــمــاريــن

Exercice 6.1

Une particule est soumise à une force définie par ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$$

Où α, β, γ sont des constantes. x, y, z sont en mètre et $\vec{F}$ en newton.

1/ Trouver les valeurs de α, β, γ pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

2/ Trouver l'expression du potentiel $E_p(x, y, z)$ dont dérive la force sachant qe $E_p(0,0,0) = 2$.

تمرين 1.6

تخضع جسيمة لحقل قوة معرفة بالإحداثيات الكارتيزية:

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k}$$

حيث α, β, γ ثوابت، x, y, z بالمتر، Fبالنيوتن.

1/ أوجد قيم α, β, γ حتى تكون $\vec{F}$ مشتقة من كمون.

2/ أوجد عبارة الكمون $E_p(x, y, z)$ الذي تشتق منه القوة $\vec{F}$ علما أن $E_p(0,0,0) = 2$.

Exercice 6.2

On considère dans un repère cartésien un champ de forces $\vec{F}$ d'expression :

$$\vec{F} = X(x,z)\vec{i} + yz\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\vec{k}$$

1. Déterminer $X(x,z)$ pour que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on calculera, sachant que la force est nulle en O. On prendra le plan Oxy comme origine des énergies potentielles.
2. Calculer alors, par deux méthodes différentes le long de l'hélice d'équations paramétriques $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = h\theta$, le travail de $\vec{F}$ du point $M_1(\theta = 0)$ au point $M_2(\theta = \pi)$.
3. Obtiendrait-on un résultat différent en calculant le travail le long d'une autre courbe ?

تمرين 2.6

نعتبر في معلم ديكارتي حقلا للقوى $\vec{F}$ عبارتها:

$$\vec{F} = X(x,z)\vec{i} + yz\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\vec{k}$$

1/ عيّن $X(x,z)$ لكي تشتق $\vec{F}$ من طاقة كامنة E_p و التي نحسبها، علما أن القوة معدومة في O. نتّخذ المستوى Oxy كمبدإ للطاقات الكامنة.

2/ أحسب بطريقتين مختلفتين، على طول الحلزون ذي المعادلات الوسيطية:

$$x = R\cos\theta \ , \ y = R\sin\theta \ , \ z = h\theta$$

عمل القوة $\vec{F}$ من النقطة $M_1(\theta = 0)$ إلى النقطة $M_2(\theta = \pi)$.

3/ هل نحصل على نتيجة مختلفة بحسابنا العمل على طول منحنى آخر؟

Exercice 6.3

Une particule matérielle de masse m se déplace sous l'action de la force :

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{u}_x + xz\vec{u}_y + xy\vec{u}_z$$

Du point $A(1,2,-1)$ au point $D(2,4,-2)$.

Calculer le travail de la force $\vec{F}$ suivant chacun des trajets suivants :

a/ la droite AD,

b/ la ligne brisée $ABCD$ où $B(2,2,-1)$ et $C(2,4,-1)$,

d/ la courbe définie par les équations paramétriques : $x = t$, $y = t^2$, $z = t$, sachant

تمرين 3.6

تنتقل جسيمة مادية كتلتها m تحت تأثير القوة:

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{u}_x + xz\vec{u}_y + xy\vec{u}_z$$

من النقطة $A(1,2,-1)$ إلى النقطة $D(2,4,-2)$.

أحسب عمل القوة $\vec{F}$ وفق كل مسلك من المسالك التالية:

ا/ المستقيم AD ،

ب/ الخط المنكسر $ABCD$ حيث $B(2,2,-1)$ و $C(2,4,-1)$

ج/ المنحنى المعرف بالمعادلات الوسيطية:

$$x = t \ , \ y = t^2 \ , \ z = t$$

que la particule quitte le point A à l'instant $t_A = 0$ et atteint le point D à l'instant $t_D = 2s$.	علما أن النقطة المادية انطلقت من A في اللحظة $t_A = 0$ و تصل إلى النطة D في اللحظة $t_D = 2s$.

Exercice 6.4 Une particule de masse m se déplace sous l'action d'une force attractive $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$. La trajectoire est un cercle de centre . Montrer que : a/ l'énergie totale est $E = -\frac{k}{2}$, b/ la vitesse est $v = \sqrt{\frac{k}{m}}$, c/ le moment cinétique est $L = \sqrt{mkr}$.	**تمرين 4.6** تنتقل جسيمة كتلتها m تحت تأثير قوة جذب $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$. المسار هو دارة نصف قطرها . برهن أن: ا/ الطاقة الكلية هي $E = -\frac{k}{2}$ ، ب/ السرعة هي $v = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، ج/ العزم الحركي هو $L = \sqrt{mkr}$.

Exercice 6.5 Une particule se déplace depuis l'origine O jusqu'au point A défini par $\vec{r} = -3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 16\vec{u}_z$ sous l'action de la force $\vec{F} = -7\vec{u}_x + 6\vec{u}_y$. Calculer : a/ le travail effectué. Est-il nécessaire de spécifier le chemin suivi par la particule ? justifier. b/ la puissance moyenne s'il faut $0,6s$ pour aller d'un endroit à un autre. c/ la variation de l'énergie cinétique sachant que la masse de la particule est $1kg$. e/ la vitesse finale si on considère la vitesse initiale nulle. f/ la différence d'énergie potentielle entre les deux points. Que remarquez-vous ? Déterminer l'énergie potentielle au point B défini par $\vec{r}\,' = 7\vec{u}_x + 16\vec{u}_y - 42\vec{u}_z$.	**تمرين 5.6** تتحرك جسيمة انطلاقا من المبدإ O حتى النقطة A المعرفة بــ $\vec{r} = -3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 16\vec{u}_z$ تحت تأثير القوة $\vec{F} = -7\vec{u}_x + 6\vec{u}_y$. أحسب: ا/ العمل المنجز. هل من اللازم توضيح المسلك المتبع؟ علل. ب/ الإستطاعة المتوسطة إذا كان الانتقال من مكان إلى آخر يتطلب $0,6s$. ج/ التغير في الطاقة الحركية علما أن كتلة الجسيمة هي $1kg$. د/ السرعة النهائية إذا اعتبرنا السرعة الابتدائية معدومة. ه/ التغير في الطاقة الكامنة بين النقطتين. ماذا تلاحظ؟ حدد الطاقة الكامنة في النقطة B المعرفة بــ $\vec{r}\,' = 7\vec{u}_x + 16\vec{u}_y - 42\vec{u}_z$.

Exercice 6.6 Une grenade lancée horizontalement avec la vitesse $v = 8ms^{-1}$, explose en trois fragments à masse égale. Le premier fragment continue à se déplacer horizontalement à $v = 16ms^{-1}$, un autre est lancé vers le haut suivant un angle de $45°$ et le troisième est projeté suivant le même angle vers le bas. Trouver la grandeur des vitesses des fragments deux et trois.	**تمرين 6.6** ترمى قنبلة يدوية أفقيا بسرعة $v = 8ms^{-1}$ ، فتنفجر منشطرة إلى ثلاث شظايا متساوية الكتلة. القطعة الأولى تواصل الانتقال أفقيا بسرعة $v = 16ms^{-1}$ ، القطعة الثانية تصعد إلى الأعلى تحت زاوية تصنع $45°$ مع الأفق، و القطعة الثالثة تتطاير تحت نفس الزاوية و لكن نحو الأسفل. أحسب شدة كل من سرعتي الشظيتين الثانية و الثالثة.

Exercice 6.7

Une masse $M = 100g$ est attachée à l'extrémité d'un ressort disposé horizontalement, comme indiqué sur la figure ci-dessous, et dont la constante de raideur est $k = 20Nm^{-1}$. Une masse $m = 50g$ se déplaçant à la vitesse $v_0 = 0.5ms^{1}$ vient heurter la masse M initialement au repos. On suppose le système isolé.

1/ Calculer la vitesse v et le déplacement maximal x_0 de la masse M après le choc, en considérant le choc comme étant élastique, et en supposant que les vitesses de M et m sont parallèles après le choc.

2/ Calculer la vitesse v' du système $(M+m)$ et la compression maximale subie par le ressort dans le cas du choc mou.

3/ Calculer le travail dépensé pour la compression maximale du ressort toujours dans le cas du choc mou.

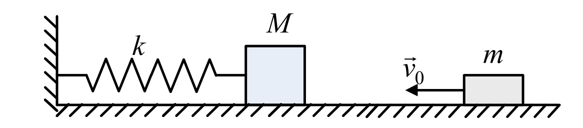
تمرين 7.6

تثبت كتلة $M = 100g$ في نهاية نابض ، ثابت مرونته $k = 20Nm^{-1}$ ، موضوع أفقيا (الشكل المرافق). تأتي كتلة $m = 50g$ بسرعة ثابتة $v_0 = 0.5ms^{1}$ لتصطدم بالكتلة M المتوقفة. نفترض الجملة معزولة.

1/ أحسب السرعة v و الانتقال الأعظمي x_0 للكتلة M بعد الصدم في حالة التصادم المرن بافتراض سرعتي M و m متوازيتين بعد الصدم.

2/ أحسب السرعة v' للجملة $(M+m)$ و الانضغاط الأعظمي x_0' للنابض في حالة التصادم اللين.

3/ أحسب العمل المصروف للانضغاط الأعظمي للنابض في حالة التصادم اللين.



Exercice 6.8

Un corps M de masse m est soumis un champ de forces à symétrie sphérique, et d' énergie potentielle de la forme : $E_p(M) = Kr^2e^{-r^2/a^2}$, où K et a sont des constantes positives et $r = OM$ la distance entre le corps M et l'origine O d'un repère inertiel.

1/ Représenter graphiquement $E_p(r)$ en fonction de , sachant que la dérivée seconde de l'énergie est positive pour $r = 0$, négative pour $r = a$ et tend vers zéro en valeurs positives quand $r \to \infty$.

2/Trouver l'expression de la valeur maximale de l'énergie E_p.

3/ Trouver les positions d'équilibre sur l'axe $X'OX$ où X est l'abscisse du corps: $-\infty \prec X \prec +\infty$.

4/ Quelles sont les positions d'équilibre stable ? justifier votre réponse.

5/ Trouver l'expression de la force $\vec{F}(M)$.

تمرين 8.6

يخضع جسم M كتلته m لحقل قوى له تناظر كروي و طاقته الكامنة من الشكل: $E_p(M) = Kr^2e^{-r^2/a^2}$ حيث K و a ثابتان موجبان و $r = OM$ بعد الجسم M عن المبدإ O لمعلم عطالي.

1/ أرسم المنحنى $E_p(r)$ بدلالة ، علما أن المشتقة الثانية للطاقة موجبة عند $r = 0$، سالبة عند $r = a$ و تؤول نحو الصفر بقيم موجبة من أجل $r \to \infty$.

2/ جد عبارة القيمة العظمى للطاقة E_p .

3/ جد مواضع التوازن على المحور $X'OX$ حيث X فاصلة الجسم: $-\infty \prec X \prec +\infty$.

4/ ما هي مواضع التوازن المستقر؟ علل إجابتك.

5/ جد عبارة القوة $\vec{F}(M)$.

Exercice 6.9

Une particule de masse m est lâchée en A sans vitesse initiale. (Figure ci-dessous). On cherche à savoir quelle doit être la hauteur H pour que la particule atteigne le point S sommet de la gouttière.

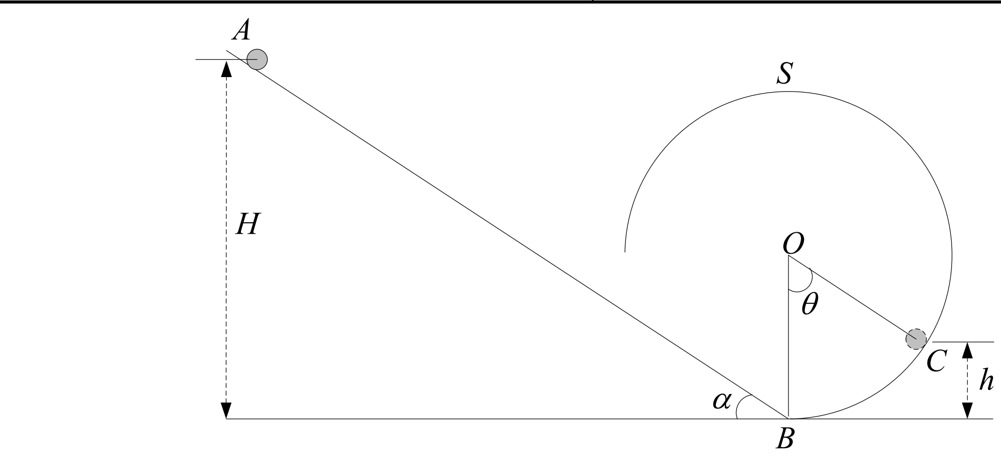
1/ Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_B au point B.

تمرين 9.6

تترك جسيمة كتلتها m من A بدون سرعة ابتدائية. (الشكل في الأسفل). نبحث لنعرف ما هو الارتفاع H اللازم لكي تبلغ الجسيمة النقطة S قمة المجرى.

1/ طبق نظرية الطاقة الميكانيكية لحساب السرعة v_B في النقطة B .

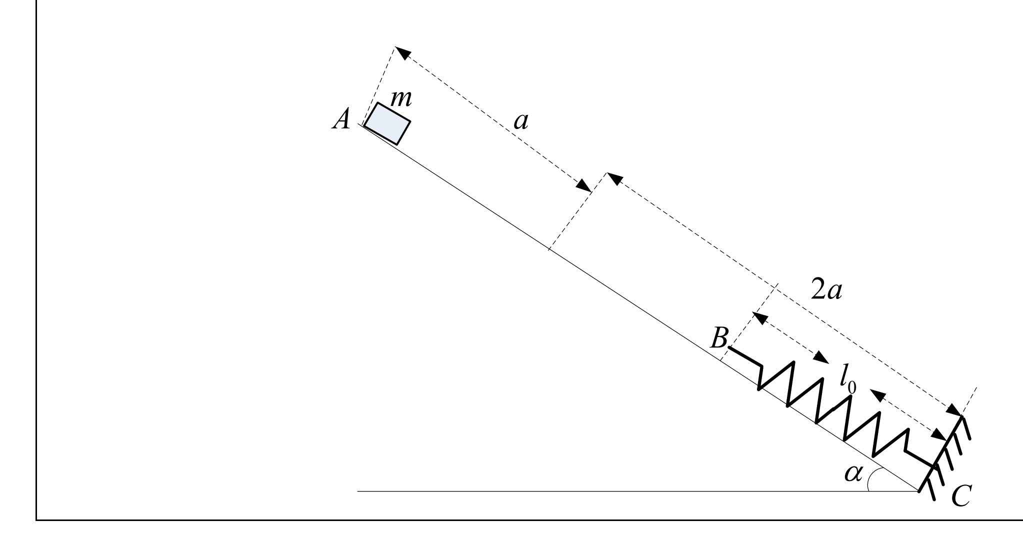
2/ Exprimer h en fonction de et θ. 3/ Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse v_C au point C en fonction de h et v_B. 4/ En appliquant le théorème fondamental de la dynamique, déduire la valeur de la réaction R en fonction de m, r, θ, v_B et g. 5/ Démontrer que la vitesse minimale que doit acquérir la particule au point B pour atteindre le point S est $v_{B,\min} = 2\sqrt{gr}$. 6/ En prenant $v_{B,\min}$ la vitesse au point B, calculer la réaction aux points B et S. Que conclure ? En quel point la réaction s'annule-t-elle ? 7/ Quelle est la vitesse $v_{0,B}$ que doit avoir la particule au point B pour atteindre le point S sans que la réaction ne change de signe ? Quelle est la valeur de H correspondante ?	2/ عبر عن h بدلالة و θ . 3/ طبق نظرية الطاقة الميكانيكية لحساب السرعة v_C في النقطة C بدلالة h و v_B . 4/ بتطبيق النظرية الأساسية للتحريك، إستنتج قيمة رد الفعل R بدلالة m, r, θ, v_B و g . 5/ برهن أن السرعة الأصغرية التي يجب على الجسيمة اكتسابها في النقطة B لتبلغ النقطة S هي $v_{B,\min} = 2\sqrt{gr}$. 6/ باتخاذ $v_{B,\min}$ السرعة في النقطة B، أحسب رد الفعل في النقطتين B و S. ماذا تستخلص؟ في أي نقطة ينعدم رد الفعل؟ 7/ ما هي السرعة $v_{0,B}$ التي يجب أن تتوفر عليها الجسيمة في النقطة B لكي تصل إلى النقطة S دون أن يغير رد الفعل اتجاه ؟ ما هي قيمة H المناسبة؟



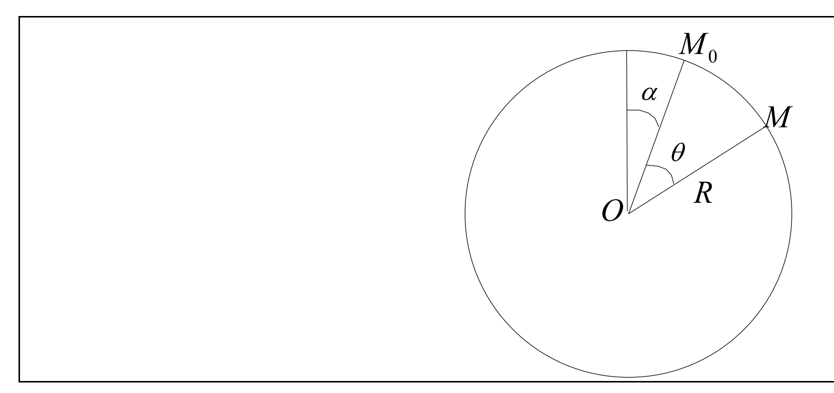
Exercice 6.10 Trois billes de masses m_1, m_2, m_3 reposent dans une gouttière horizontale parfaitement lisse. La bille m_1 est poussée avec une vitesse initiale dans la direction de la bille m_2 qui à son tour, et après le choc avec m_1, roule dans la direction de m_3 et l'heurte. En considérant les premier et deuxième chocs parfaitement élastiques, quelle doit être la vitesse que doit prendre la bille m_2 pour que la vitesse de la bille m_3 soit maximale ?	**تمرين 10.6** توضع ثلاث كرات كتلها m_1, m_2, m_3 في مجرى أفقي كامل الملوسة. تدفع الكرة m_1 بسرعة ابتدائية في اتجاه الكرة m_2 و التي بدورها، و بعد الصدم مع m_1، تتدحرج في اتجاه m_3 و تصدمها. باعتبار الصدمتين الأولى و الثانية مطلقتي المرونة، فما هي القيمة التي يجب أن تأخذها الكرة m_2 حتى تكون سرعة الكرة m_3 بعد الصدم أعظمية.

Exercice 6.11 Le corps de la figure ci-dessous a une masse $m = 5kg$. Partant du repos, il glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale, jusqu'à ce qu'il atteigne le ressort R de	**تمرين 11.6** الجسم المبين على الشكل أسفله كتلة هي $m = 5kg$ و ينطلق من السكون لينزلق على مستوى مائل بزاوية $\alpha = 60°$ بالنسبة للأفق، حتى يبلغ النابض الذي طوله $l_0 = 40cm$، ثابت مرونته $k = 5000 N.m^{-1}$

longueur à vide $l_0 = 40cm$, de constante de raideur $k = 5000N.m^{-1}$, et dont l'autre extrémité C est fixée au bout du plan. On suppose qu'une force de frottement s'oppose au mouvement du corps sur le segment $AB = a$, le coefficient de frottement cinétique étant $\mu = 0,2$,puis elle s'annule sur le reste du trajet $BC = 2a$. 1/ Calculer la force de frottement sur le segment AB . 2/ Calculer la vitesse acquise par le corps au point B , puis la vitesse v avec laquelle le corps heurte le ressort. 3/ De combien le ressort se déforme-t-il ? 4/ De combien le corps remonte-t-il sur le plan incliné lorsqu'il est repoussé par le ressort vers le haut à partir du point où a eu lieu le premier choc, en supposant que la remontée se fait sans frottement ? On prend $g = 9,8ms^{-2}$.	وحيث طرفه الآخر مثبت في نهاية المستوى. نفترض قوة احتكاك تعاكس حركة الجسم على القطعة المستقيمة $AB = a$ ، معامل الاحتكاك الحركي يساوي $\mu = 0,2$ ، ثم تنعدم على باقي المسلك $BC = 2a$. 1/ أحسب قوة الاحتكاك على القطعة المستقيمة AB . 2/ أحسب السرعة المكتسبة من طرف الجسم في النقطة B،ثم السرعة v التي يصدم بها الجسم النابض . 3/ ما هو مقدار انضغاط النابض؟ 4/ بكم يصعد الجسم على المستوى المائل حينما يدفعه النابض من جديد إلى الأعلى ابتداء من نقطة الاصطدام الأول ، بافتراض أن الصعود يتم بدون احتكاكات؟ نأخذ $g = 9,8ms^{-2}$.



Exercice 6.12 On abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ un point matériel de masse m en un point M_0 de la face convexe d'une sphère de centre O et de rayon R , sur laquelle il est susceptible de glisser sans frottement. (Figure ci-dessous). 1/ En n'appliquant que le théorème de la conservation de l'énergie trouver la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de R, g, α et θ . 2/ En appliquant le principe fondamentale de la dynamique trouver la réaction du support en fonction de θ, α, m et g . 3/ Pour quel angle θ_0 le point matériel quitte-t-il la sphère ? Discuter le résultat.	**تمرين 12.6** نترك نقطة مادية كتلتها m بدون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ من النقطة M_0 لتنزلق بدون احتكاكات على الوجه المحدودب لكرة مركزها O و نصف قطرها R . (الشكل في الأسفل). 1/ بتطبيق نظرية انحفاظ الطاقة فقط أوجد سرعة الزاوية $\dot{\theta}$ بدلالة R, g, α و θ . 2/ بتطبيق المبدإ الأساسي للتحريك أوجد رد فعل الحامل بدلالة θ, α, m و g . 3/ من أجل أي زاوية θ_0 تغادر النقطة المادية الكرة؟ ناقش النتيجة.



Exercice 6.13

Un corps de masse m se déplace sur l'axe $x'Ox$. Son énergie potentielle est donnée par l'expression $E_p = K\dfrac{x}{x^2+a^2}$, où K et a sont des constantes positives.

1/ représenter l'allure générale de la courbe $E_p = f(x)$.

2/ trouver les positions d'équilibre en précisant celles qui sont stables et celle qui sont instables.

تمرين 13.6

يتحرك جسم كتلته m على المحور $x'Ox$. طاقته الكامنة معطاة بالعبارة: $E_p = K\dfrac{x}{x^2+a^2}$ ، حيث K و a ثابتان موجبان.

1/ أرسم الشكل العام للمنحنى $E_p = f(x)$.

2/ أوجد مواضع التوازن موضحا المستقرة منها و الغير مستقرة.

Exercice 6.14

Soit un référentiel $\mathbb{R}$ de repère $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Une bille assimilée à un point P, de masse m, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a .(Figure ci-dessous).

Le point P est attaché à un fil élastique dont l'autre extrémité est fixée en $O'(OO'=a)$. Le fil possède une raideur k et une longueur à vide l_0. Le point P est repéré par l'angle $(Ox,OP)=\theta$.

1. a/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de a,θ dans la base polaire $\left(\vec{u}_r=\dfrac{OP}{a},\vec{u}_\theta\right)$. En déduire l'expression du module $O'P$.

b/ Exprimer la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de a,k,l_0 et θ dans cette même base.

2. a/ Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base polaire.

b/ On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la bille P. Donner l'expression de la puissance $\vec{F}.\vec{v}$ en fonction de a et θ.

(c) En déduire l'énergie potentielle E_p dont dérive la force $\vec{F}$.

3. (a) On suppose vérifiées les relations suivantes entre les paramètres :

$$a=\frac{2mg}{k}\quad,\quad l_0=\sqrt{3}\left(a-\frac{mg}{k}\right)$$

تمرين 14.6

ليكن مرجع $\mathbb{R}$ ذي المعلم $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.

كرية مستمثل لنقطية P، كتلتها m، مضطرة للانتقال بدون احتكاك على طول نصف دائرة نصف قطرها a .(الشكل في الأسفل).

النقطة P مربوطة إلى خيط مطاطي حيث يثبت الطرف الآخر في $O'(OO'=a)$. للخيط ثابت مرونة k و طول و هو فارغ l_0. تحدد النقطة P بالزاوية $(Ox,OP)=\theta$.

1. ا/ عبر عن الشعاع $\overrightarrow{O'P}$ بدلالة a,θ في القاعدة القطبية $\left(\vec{u}_r=\dfrac{OP}{a},\vec{u}_\theta\right)$. إستنتج عبارة الشدة $O'P$.

ب/ عبر عن التوتر $\vec{T}$ للخيط بدلالة a,k,l_0 و θ في نفس القاعدة.

2. ا/ حدد عبارة شعاع السرعة $\vec{v}$ في القاعدة القطبية.

ب/ نرمز بـــ $\vec{F}$ لمحصلة القوى المطبقة على الكرية P. إعط عبارة الاستطاعة $\vec{F}.\vec{v}$ بدلالة a و θ.

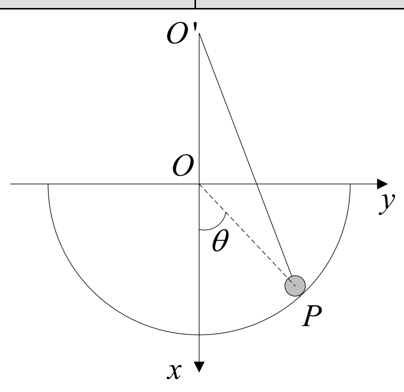
ج/ إستنتج الطاقة الكامنة E_p التي تشتق منها $\vec{F}$.

3. ا/ نفترض العلاقات التالية بين الثوابت محققة:

$$a=\frac{2mg}{k}\quad,\quad l_0=\sqrt{3}\left(a-\frac{mg}{k}\right)$$

ما هما موضعي التوازن θ_1 و θ_2 من أجل

Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$? (b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ؟ ب/ أدرس استقرار التوازنين المحصل عليهما.



Exercice 6.15 Deux pendules simples de même longueur l, sont suspendus au même point O. Les billes B_1 et B_2 qui les constituent possèdent les masses m_1 et m_2, et seront supposées ponctuelles. Au départ, B_1 et B_2 sont en équilibre. On écarte B_1 d'un angle α_0 , puis on l'abandonne sans vitesse initiale. 1/ Déterminer les vitesses v_1 et v_2 de B_1 et B_2 après le choc, en fonction de α, l, g et du rapport des masses $x = m_1 / m_2$; ainsi que les angles d'écart maximum α_1 et α_2 de B_1 et B_2 après le choc, en fonction de α et x dans les deux cas : a/ en supposant la collision parfaitement élastique (que se passe-t-il pour $x \succ 1$; $x = 1$; $x \prec 1$?) ; b/ si on enduit B_1 et B_2 de glu, de manière à rester collées après la collision (choc mou). 2/ Application numérique : $\alpha_0 = 60°$. a/ On se place dans le cas1/a/ : pour quelle valeur de x les pendules remontent-ils en sens contraires, du même angle que l'on déterminera ? b/ Pour $x = 2$, déterminer les angles d'écart dans les cas $1/a/$ et $1/b/$.	**تمرين 15.6** يعلق في نفس النقطة O نواسان بسيطان لهما نفس الطول l. الكريتان B_1 و B_2 اللتان تشكلهما لهما كتلتين m_1 و m_2 ، و نفترضهما نقطيتين. في البداية m_1 و m_2 في توازن. نزيح B_1 بزاوية α_0، ثم نتركها بدون سرعة ابتدائية. 1/ حدد السرعتين v_1 و v_2 لـــ m_1 و m_2 بعد الصدم، بدلالة g, l, α و نسبة الكتلتين $x = m_1 / m_2$؛ و كذا زاويتي الانحراف الأعظمي α_1 و α_2 لـــ m_1 و m_2 بعد الصدم، بدلالة α و x في الحالتين: ا/ بافتراض الاصطدام كامل المرونة، (ما الذي يحدث من أجل $x \succ 1$ ؛ $x = 1$ ؛ $x \prec 1$ ؟)؛ ب/ لو طلينا m_1 و m_2 و بغراء بحيث تبقيان ملتصقتين بعد الصدم (الصدم اللين). 2/ تطبيق عددي: $\alpha_0 = 60°$. ا/ نتخذ الحالة1/ا/: من أجل أي قيمة لـــ x يصعد النواسان في اتجاهين متعاكسين، بنفس الزاوية الواجب تعيينها؟ ب/ من أجل $x = 2$ ، حدد زاويتي الانحراف في الحالتين1/ا/ و 1/ب/.

Corrigés des exercices de 6.1 à 6.15 حلول التمارين من 1.6 إلى 15.6

تمرين 1.6

1/ لكي تكون $\vec{F}$ مشتقة من كمون لا بد أن تتحقق المعادلة $\overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{0}$ أي تحقيق المعادلات التالية التي نستنتج منها قيم المجاهيل الثلاثة:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}\Rightarrow \boxed{\beta=2}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow \boxed{\gamma=-1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}\Rightarrow \boxed{\alpha=4}$$

و عليه فإن عبارة $\vec{F}$ هي: $\vec{F}=(x+2y+4z)\vec{i}+(2x-3y-z)\vec{j}+(4x-y+2z)\vec{k}$

2/ نعرف أن $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}E_p(x,y,z)$، و انطلاقا من هذا و بتسلسل في التحليل نتوصل إلى عبارة الكمون الذي اشتقت منه القوة المذكورة أعلاه:

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x}=F_x\Rightarrow -E_p=\frac{1}{2}x^2+2xy+4xz+f(y,z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial y}=F_y\Rightarrow 2x+\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}=2x-3y-z\Rightarrow f(x,y)=-\frac{3}{2}y^2-yz+g(z)$$

$$-E_p=\frac{1}{2}x^2+2xy+4xz-\frac{3}{2}y^2-yz+g(z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial z}=F_z\Rightarrow 4x-y+\frac{\partial g(z)}{\partial z}=4x-y+2z\Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z}=2z$$

$$g(z)=z^2+C^{te}$$

إذن عبارة الكمون هي:

$$E_p=-\frac{1}{2}x^2-2xy-4xz+\frac{3}{2}y^2+yz-z^2+C^{te}$$

لتعيين الثابت C^{te} نعود إلى الشروط الإبتدائية: $E_p(0,0,0)=2\Rightarrow C^{te}=2$

و في الأخير فإن عبارة الطاقة الكامنة (أو الكمون) المطلوبة هي:

$$\boxed{E_p=-\frac{1}{2}x^2-2xy-4xz+\frac{3}{2}y^2+yz-z^2+2}$$

تمرين 2.6:

1/ لكي تكون $\vec{F}$ مشتقة من كمون لا بد أن تتحقق المعادلة $\overrightarrow{rot}\vec{F}=\vec{0}$، أي تحقيق المعادلات التالية التي نستنتج منها قيمة $X(x,z)$. نستنتج من النص أن: $F_x=X(x,z)\ ,\ F_y=yz\ ,\ F_z=x^2+\frac{1}{2}y^2$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y}=0\Rightarrow F_x=C^{te}\rightarrow(1)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z}=2x\Rightarrow F_x=2xy+C^{te}\rightarrow(2)$$

الحل الأول (1)غير مناسب لأن $F_x = X(x,z)$ تابع لــ x و z. الحل الثاني مناسب. الثابت معدوم حسب الشروط الإبتدائية. و منه: $\boxed{F_x = X(x,z) = 2xz}$

لحساب الطاقة الكامنة نستعمل العلاقة $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$:

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x \Rightarrow -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2xz \Rightarrow -E_p = x^2 z + f(y,z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial y} = F_y \Rightarrow 0 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = yz \Rightarrow f(y,z) = \frac{1}{2}y^2 z + g(z)$$

$$-E_p = x^2 z + \frac{1}{2}y^2 z + g(z)$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial z} = F_z \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}y^2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow g(z) = C^{te}$$

النتيجة هي: $E_p = -x^2 z - \frac{1}{2}y^2 z + C^{te}$. غير أن وحسب الشرط الإبتدائية في الطاقة الكامنة فإن الثابت معدوم$(z = 0 \Leftrightarrow E_p = 0)$. وفي الأخير نحصل على النتيجة النهائية:

$$\boxed{E_p = -x^2 z - \frac{1}{2}y^2 z}$$

2/ عمل القوة:

<u>الطريقة الأولى:</u>

نعرف القانون: $dW = -dE_p \;\;,\;\; dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} \;\;,\;\; W = \int_L \vec{F}.\overrightarrow{dl} = E_p(B) - E_p(A)$

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \\ E_p = z\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = h\theta R^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = h\theta R^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_p(A) = 0 \\ E_p(B) = h\pi R^2\left(\cos^2\pi + \frac{1}{2}\sin^2\pi\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = E_p(B) - E_p(A) = h\pi R^2} \rightarrow (3)$$

<u>الطريقة الثانية:</u>

نحسب مباشرة العمل باستعمال القانون $W = \int_A^B \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz\right]$:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ dx = -R\sin\theta.d\theta \\ F_x = 2xz = 2Rh\theta\cos\theta \end{array}\right| \Rightarrow F_x dx = -2R^2 h\theta\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} y = R\sin\theta \\ dy = R\cos\theta.d\theta \\ F_y = yz = 2Rh\theta\sin\theta \end{array}\right| \Rightarrow F_y dy = R^2 h\theta\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} z = h\theta \\ dz = R.d\theta \\ F_z = x^2 + \frac{1}{2}y^2 = R^2h\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow F_z dz = R^2h\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$W = \int_0^{\pi} R^2h\left(-\theta\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$W = R^2h\left[\theta\left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right]_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{W = R^2h\pi} \rightarrow (4)$$

النتيجتان (3) و (4) متساويتان.

3/ القوة محافظة و لذا العمل هو نفسه مهما كان المسلك المتبع.

تمرين 3.6:

عمل القوة $\vec{F}$ مهما كان المسلك هو $W = \int \vec{F}d\vec{r}$.

ا/ عمل القوة $\vec{F}$ وفق المسلك المستقيم:

تذكير رياضي: نستخرج معادلة مستقيم يمر من النقطتين $P(x_P, y_P, z_P)$ و $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ بوضع المعادلات التالية:

$$\frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \frac{z - z_P}{z_Q - z_P}$$

في حالتنا هذه معادلة المسار المستقيم هي:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y = 2x \\ z = -x \\ z = -\frac{1}{2}y + 1 \end{array}\right.$$

يمكننا الآن كتابة عبارة القوة $\vec{F}$ و الانتقال العنصري $d\vec{r}$ بدلالة المتغير الوحيد x في المعلم الديكارتي وذلك بتعويض كل من y و z :

$$\vec{F} = 5x^2\vec{u}_x - x^2\vec{u}_y + 2x^2\vec{u}_z$$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z \\ y = 2x \Rightarrow dy = 2dx \\ z = -x \Rightarrow dz = -dx \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{r} = dx\vec{u}_x + 2dx\vec{u}_y - dx\vec{u}_z$$

نحسب عمل القوة في الحالة الأولى:

$$\vec{F}\vec{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow \vec{F}\vec{dr} = x^2 dx \quad ; \quad W = \int_1^2 \vec{F}\vec{dr} = \int_1^2 x^2 dx \Rightarrow W = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 \Rightarrow \boxed{W = \frac{7}{3}J}$$

ب/ عمل القوة $\vec{F}$ وفق الخط المنكسر $ABCD$:

في هذه الحالة لا بد من تجزئة العمل الإجمالي W_{AD} إلى ثلاثة أعمال W_{BC}, W_{AB} و W_{CD} المنجزة على القطع المستقيمة BC, AB و CD.

- **على القطعة المستقيمة** AB لدينا x متغير ، $y = 2$ و $z = -1$. تكون عبارتا القوة و الانتقال العنصري:

$$\vec{F} = \left(x^2 + 4\right)\vec{u}_x - x\vec{u}_y + 2x\vec{u}_z$$
$$\vec{dl} = dx\vec{u}_x$$

نحسب العمل لهذا الجزء من المسلك:

$$\vec{F}\vec{dl} = \left(x^2 + 2\right)dx \quad ; \quad W_{AB} = \int_1^2 \left(x^2 + 4\right)dx \Rightarrow W_{AB} = \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_1^2 \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \frac{19}{3} = 6,33J}$$

- **على القطعة المستقيمة** BC لدينا y متغير ، $x = 2$ و $z = -1$. تكون عبارتا القوة و الانتقال العنصري:

$$\vec{F} = \left(4 + y^2\right)\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + 2y\vec{u}_z$$
$$\vec{dl} = dy\vec{u}_y$$

نحسب العمل لهذا الجزء من المسلك:

$$\vec{F}\vec{dl} = -2dy \quad ; \quad W_{BC} = \int_2^4 -2dy \Rightarrow W_{BC} = \left[-2y\right]_2^4 \Rightarrow \boxed{W_{BC} = -4J}$$

- **على القطعة المستقيمة** CD لدينا z متغير ، $x = 2$ و $y = 4$. تكون عبارتا القوة و الانتقال العنصري:

$$\vec{F} = \left(4 + 16\right)\vec{u}_x + 2z\vec{u}_y + 8\vec{u}_z$$
$$\vec{dl} = dz\vec{u}_z$$

نحسب العمل لهذا الجزء من المسلك:

$$\vec{F}\vec{dl} = 8dz \quad ; \quad W_{CD} = \int_{-1}^{-2} 8dz \Rightarrow W_{CD} = \left[8z\right]_{-1}^{-2} \Rightarrow \boxed{W_{CD} = -8J}$$

العمل الكلي للقوة من A إلى D هو:

$$W_{AD} = W_{AB} + W_{BC}W_{CD} \Rightarrow \boxed{W_{AD} = -5,67J}$$

ج/ عمل القوة $\vec{F}$ وفق المنحنى المعرف بالمعادلات الوسيطية $x = t \;,\; y = t^2 \;,\; z = t$:

نعوض في عبارة القوة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=\left(t^2+t^4\right)\vec{u}_x+t^2\vec{u}_y+t^3\vec{u}_z\\ dx=dt\ ,\ dy=2tdt\ ,\ dz=dt\\ \vec{F}\overrightarrow{dr}=\left(t^2+t^4\right)dt+2t^3dt+t^3dt\end{array}\right|\Rightarrow dW=\left(t^4+3t^3+t^2\right)dt$$

و العمل المنجز من قبل هذه القوة هو إذن:

$$W=\int_0^2\left(t^4+3t^3+t^2\right)dt\Rightarrow\boxed{W=28J}$$

التمرين 4.6:

ا/ بما أن القوة مركزية و لا تتغير إلا بدلالة وحدها، فإن الطاقة الكامنة لها تناظر كروي و لا تتغير إلا بدلالة هي كذلك. إذن العلاقة بين القوة و الطاقة الكامنة هي $\vec{F}=-\vec{\nabla}E_p$. و بما أن المتغير وحيد فإن العلاقة تتحقق كليا في المركبة النصف قطرية: $\frac{dE_p}{dr}=\frac{k}{r^2}$. من هنا نستنتج قيمة الطاقة الكامنة:

$$E_p=\int\frac{k}{r^2}dr\Rightarrow E_p=-\frac{k}{r}+C^{te}$$

لتعيين ثابت التكامل نعتبر $E_p=0$ من أجل $r\to\infty$. و منه فإن $C^{te}=0$. و عليه:

$$\boxed{E_p=-\frac{k}{r}}\rightarrow(1)$$

الطاقة الكلية E هي الطاقة الميكانيكية أي مجموع الطاقتين الكامنة E_p و الحركية E_c.

بما أن الحركة دائرية و المسار دائري فإن $v=\dot{\theta}$، علما أن $\dot{\theta}$ ترمز إلى السرعة الزاوية. إذن:

$$\left.\begin{array}{l}E_c=\frac{1}{2}mv^2\\ v=\dot{\theta}r\end{array}\right|\Rightarrow E_c=\frac{1}{2}\underbrace{m\dot{\theta}^2r}_{F=F_c}.r$$

$$E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r^2}.r\Rightarrow\boxed{E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r}}\rightarrow(2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على الطاقة الكلية:

$$E=\frac{1}{2}\frac{k}{r}-\frac{k}{r}\Rightarrow\boxed{E=-\frac{1}{2}\frac{k}{r}}$$

ب/ نستنتج عبارة السرعة من المعادلة (2):

$$E_c=\frac{1}{2}\frac{k}{r}=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\boxed{v=\sqrt{\frac{k}{mr}}}$$

ج/ حساب العزم الحركي في الإحداثيات الأسطوانية بالنسبة لمركز الدائرة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\vec{r}\wedge m\vec{v}\\ \vec{v}=\underbrace{\vec{v}_r}_{0}+\vec{v}_\theta=r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\end{array}\right|\Rightarrow m\begin{vmatrix}\vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ r & 0 & 0\\ 0 & r\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{L}_O=mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z}$$

في الأخير شدة العزم الحركي تساوي:

$$L_O = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \dot{\theta} = \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{mr}} \Rightarrow L_O = mr^2\frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{mr}} \Rightarrow \boxed{L_O = \sqrt{mkr}}$$

تمرين 5.6:

ا/ نلاحظ أن القوة ثابتة. العمل المنجز إذن يساوي:

$$dW = \vec{F}\,\vec{dr}$$

$$W = \int\left(F_x dx + F_y dy + \underbrace{F_z dz}_{0}\right) \Rightarrow \boxed{W = \int_0^{-3} F_x dx + \int_0^{4} F_y dy}$$

$$W = \int_0^{-3} -7dx + \int_0^{4} 6dy = 21 + 24 \Rightarrow \boxed{W = 45J}$$

ب/ الإستطاعة المتوسطة:

$$\boxed{P_{moy} = \frac{W}{t}} \ , \ P_{moy} = \frac{45}{0,6} \Rightarrow \boxed{P_{moy} = 75W}$$

ج/ لحساب التغير في الطاقة الحركية نطبق نظرية الطاقة الحركية: $\Delta E_c = \sum W_i \Rightarrow \boxed{\Delta E_c = 45J}$

د/ السرعة النهائية باعتبار السرعة الإبتدائية معدومة:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \Delta E_c \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}}} , \ \boxed{v = 9,48ms^{-1}}$$

ه/ التغير في الطاقة الكامنة ما هو إلا العمل المنجز تسبقه إشارة الناقص:

$$\boxed{\Delta E_p = -W} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = -45J}$$

نلاحظ من خلال النتائج المتحصل عليها أن $\boxed{\Delta E_p = -\Delta Ec}$، نفسر هذا كالتالي:

إنطلقت الجسيمة من المبدإ بدون سرعة ابتدائية أي لم تكن لها طاقة حركية في البداية و كانت لها طاقة كامنة، و وصلت إلى النقطة A بالسرعة التي حسبناها سابقا، أي بطاقة حركية تساوي بالضبط الطاقة الكامنة التي صرفت كليا. إذن الطاقة الكامنة عند وصول الجسيمة إلى النقطة A معدومة $\left(E_{p,A} = 0\right)$.

نحسب العمل المنجز من قبل القوة حين انتقالها من النقطة A إلى النقطة B:

$$dW_{AB} = \vec{F}\,\vec{dr}$$

$$W_{AB} = \int\left(F_x dx + F_y dy\right) \Rightarrow \boxed{W_{AB} = \int_{-3}^{7} F_x dx + \int_{4}^{16} F_y dy}$$

$$W_{AB} = \int_{-3}^{7} -7dx + \int_{4}^{16} 6dy = -28 + 72 \Rightarrow \boxed{W_{AB} = 44J}$$

يمكننا الآن حساب الطاقة الكامنة $E_{p,B}$ في النقطة B:

$$E_{P,A} - E_{p,B} = -W_{AB} \Rightarrow E_{p,B} = 44 \ , \ \boxed{E_{p,B} = 44J}$$

تمرين 6.6

حسب مبدإ انحفاظ كمية الحركة فإن كمية الحركة قبل الإنفجار تساوي مجموع كميات الحركة بعد الإنفجار:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow M\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3$$

بما أن $\vec{p}$ و $\vec{p}_1$ أفقيتان فإن محصل $\vec{p}_2$ و $\vec{p}_3$ أفقية كذلك، و رباعي الأضلاع معين.(أنظر الشكل) باستعمال قانون الجيوب يمكننا أن نكتب:

$$\frac{p_2}{\sin 45°} = \frac{p_3}{\sin 45°} \Rightarrow \boxed{v_2 = v_3}$$

من الشكل يمكن حساب شدة المحصلة لـــ $\vec{p}_2$ و $\vec{p}_3$:

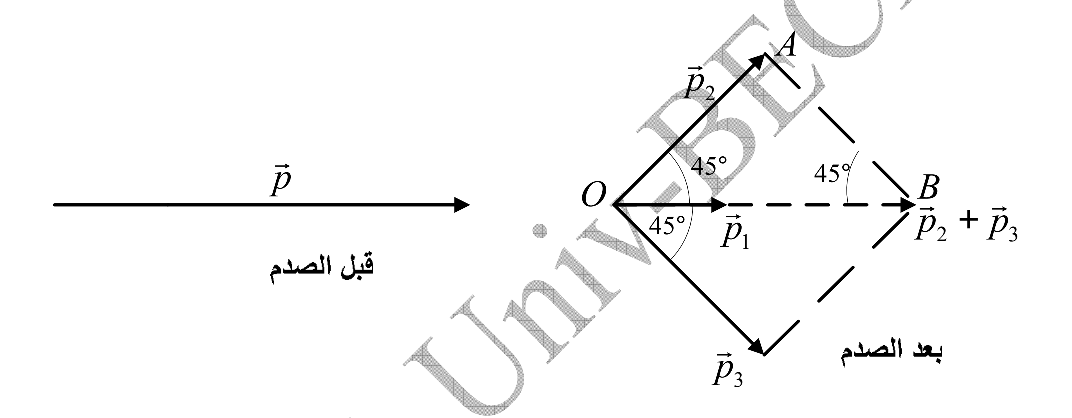
$$\vec{R} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow R = \sqrt{p_2^2 + p_3^2} \Rightarrow \boxed{R = mv_2\sqrt{2}}$$

لم يبقى لنا سوى حساب شدة السرعتين المطلوبتين:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \underbrace{\vec{p}_2 + \vec{p}_3}_{\vec{R}} \Rightarrow p = p_1 + R \Rightarrow Mv = mv_1 + mv_2\sqrt{2}$$

$$M = 3m \Rightarrow v = v_1 + v_2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{3v - v_1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{v_2 = v_3 = 11,3ms^{-1}}$$



<u>تمرين 7.6:</u>

1/ لحساب السرعة نطبق على الجملة المعزولة $(M+m)$ مبدأي انحفاظ كمية الحركة والطاقة الحركية. بما أن التصادم مرن فإن سرعة الكتلة m تختلف عن سرعة الكتلة M.

$$p_1 = p_2 \ \ , \ mv_0 = mv_1 + Mv \Rightarrow mv_1 = mv_0 - Mv \rightarrow (1)$$

$$E_{C1} = E_{C2} \ \ , \ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow mv_1^2 = mv_2^2 - Mv^2 \rightarrow (2)$$

نربع المعادلة (1) و نضرب المعادلة (2) في الكتلة m ثم نقوم بعملية الطرح و نستخرج السرعة v:

$$(1)^2 - (2).m \Rightarrow \boxed{v = \frac{2mv_0}{M+m}} \ , \ \boxed{v = 0,33ms^{-1}}$$

لحساب الانضغاط الأعظمي نستعمل مبدأ التحويل المتبادل للطاقة. الكتلة M تتوقف بعد قطع مسافة أعظمية x_0 و انضغاط بنفس المقدار. كل الطاقة الحركية المكتسبة نتيجة التصادم مع m تحولت كليا إلى طاقة كامنة مرونية يخزنها النابض.

$$E_c = E_p \ \ , \ \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \boxed{x_0 = v\sqrt{\frac{M}{k}}} \ , \ \boxed{x_0 = 2,33cm}$$

2/ بما أن التصادم لين فإن سرعة الكتلة m تساوي سرعة الكتلة M. لحساب السرعة نطبق مبدأي انحفاظ كمية الحركة على الجملة $(M+m)$:

$$p_1^{'} = p_2^{'} \ \ , \ mv_0 = (M+m)v^{'} \Rightarrow \boxed{v^{'} = \frac{mv_0}{M+m}} \ \ \boxed{v' = 0{,}17ms^{-1}}$$

3/ الصدم لين. الطاقة الحركية المصروفة تساوي الطاقة الكامنة المخزنة:

$$E_c = E_p \ \ , \ \ \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}kx_0^{'2} \Rightarrow \boxed{x_0^{'} = v^{'}\sqrt{\frac{M+m}{k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{k(m+M)}}} \ ,$$

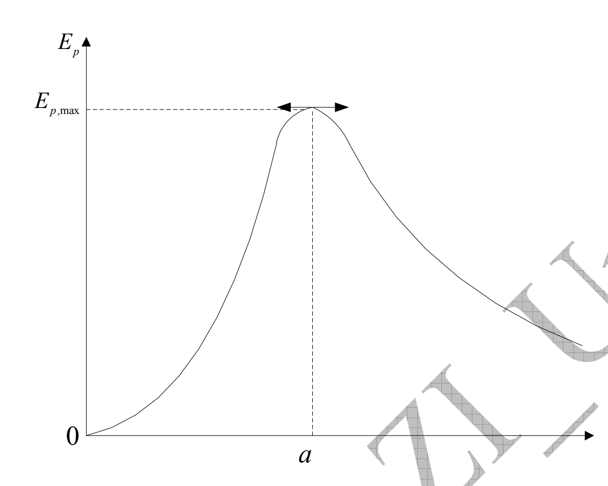
$$\boxed{x_0^{'} = 2{,}33cm}$$

للحصول على العمل المطلوب نطبق نظرية الطاقة الحركية:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_c = \sum W \\ \Delta E_c = \Delta E_p \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}kx_0^{'2}} \ , \ \boxed{W = 2{,}17J}$$

تمرين 8.6:

1/ يمثل الشكل أسفله تغيرات الطاقة لكامنة بدلالة البعد .



	0	a	$+\infty$
$\frac{dE_p}{dr} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}$	+	0	−
$\frac{d^2E_p}{dr^2}$	+	−	+
$\left(\frac{d^2E_p}{dr^2}\right)\left(\frac{dE_p}{dr}\right)$	+		−
$E_p(r)$	↗	0	↘

2/ تبلغ الطاقة الكامنة قيمتها الأعظمية لما تنعدم المشتقة الأولى للطاقة بالنسبة لـــ :

$$\frac{dE_p}{dt} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2} = 0 \Rightarrow r = a$$

$$r = a \Rightarrow \boxed{E_{p,\max} = Ka^2e^{-1}}$$

3/ مواضع التوازن توافق انعدام المشتقة الأولى $\frac{dE_p}{dt} = 0$ حيث $r \in]-\infty, +\infty[$:

$$\frac{dE_p}{dt} = 2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \{0, \pm a, \pm\infty\}}$$

4/ مواضع التوازن المستقر توافق المواضع التي من أجلها $\frac{d^2E_p}{dt^2} \succ 0$، و $\frac{dE_p}{dt} = 0$ ، و من ذلك و حسب النص فإن:

$$\frac{d^2E_p}{dt^2} = 2K\left(1-5\frac{r^2}{a^2}+2\frac{r^4}{a^2}\right)e^{-\frac{r^2}{a^2}} \succ 0 \Rightarrow \boxed{r = \{0, \pm\infty\}}$$

5/ عبارة القوة $\vec{F}(M)$ نستنتجها من القانون $\vec{F}(M)=-\vec{\nabla}E_p$:

$$\vec{F}(M)=-\vec{\nabla}E_p \Rightarrow \vec{F}(M)=-\frac{dE_p}{dt}\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{F}(M)=-2Kr\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-r^2/a^2}.\vec{u}_r}$$

تمرين 9.6:

1/ حساب السرعة v_B : $\frac{1}{2}mv_B^2-\underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{0}=mgH \Rightarrow \boxed{v_B=\sqrt{2gH}}$

2/ عبارة h بدلالة و θ : $h=r-r\cos\theta \Rightarrow \boxed{h=r(1-\cos\theta)}$

3/ حساب السرعة v_C في النقطة C بدلالة h و v_B :

$$\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}mv_B^2=-mgh \Rightarrow \boxed{v_C=\sqrt{-2gh+v_B^2}}$$

4/ قيمة رد الفعل R بدلالة m,r,θ,v_B و g :

الجسيمة خاضعة للقوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$. بما أن الحركة دائرية فأن محصلة القوى ناظمية. نسقط القوى على المحور الناظمي و نستنتج رد الفعل:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{R}+\vec{P}=m\vec{a}\\ R-mg\cos\theta=ma_N\\ a=a_N=\frac{v_C^2}{r}=\frac{1}{r}\left(-2gh+v_B^2\right)\\ h=r(1-\cos\theta)\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{R=3mg\cos\theta-2mg+\frac{m}{r}v_B^2} \rightarrow (1)$$

5/ لكي تبلغ الجسيمة النقطة S على الأقل بسرعة معدومة فلا بد أن تكون قد اكتسبت في B سرعة أصغرية تحقق المعادلة التالية:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_S^2}_{0}-\frac{1}{2}mv_B^2=-mg(2r) \Rightarrow \boxed{v_{B,\min}=\sqrt{4gr}}$$

6/ لحساب رد الفعل في النقطتين B و S نستغل المعادلة (1) و نعوض h و θ :

في النقطة B ، $\theta=0, h=0$:

$$R_B=3mg\cos 0-2mg+\frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$R_B=3mg-2mg+\frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_B=5mg}$$

في النقطة S ، $\theta=\pi, h=$:

$$R_S=3mg\cos\pi-2mg+\frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$R_S=-3mg-2mg+\frac{m}{r}4gr \Rightarrow \boxed{R_S=-mg}$$

لما تنتقل الجسيمة بين النقطتين المذكورتين فإن إشارة رد الفعل تتغير من الموجب إلى السالب. هذا يدل على انعكاس اتجاه رد الفعل في نقطة I (نفهم من هذا انعدام رد الفعل في نقطة I). نقطة انعدام رد الفعل معرفة بالزاوية θ_I و التي نريد حسابها(دائما من المعادلة (1)):

$$R_I = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}v_{B,\min}^2$$

$$0 = 3mg\cos\theta_I - 2mg + \frac{m}{r}4gr \Rightarrow \cos\theta_I = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_I \approx 132°}$$

7/ حتى لا ينعدم رد الفعل بين النقطتين B و S أي يبقى موجبا على طول القوس BS يجب تحقيق الشرط التالي:

$$R \geq 0 \Rightarrow 3mg\cos\pi - 2mg + m\frac{v_{B,0}^2}{r} \geq 0$$

$$\boxed{v_{B,0} \geq \sqrt{5rg}}$$

قيمة H المناسبة هي:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_{B,0}^2 = mgH \\ v_{B,0}^2 \geq 5rg \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{H \geq \frac{5}{2}r}$$

تمرين 10.6:

الصدم الأول:

لتكن $\vec{v}_1$ السرعة الابتدائية للكرة m_1 قبل الصدم الأول، حينما الكرة m_2 في حالة سكون. بعد الصدم الأول تصبح للكرة m_1 السرعة $\vec{v}_1^{'}$، بينما الكرة m_2 تكتسب السرعة $\vec{v}_2$. نطبق مبدأي انحفاظ كمية الحركة و الطاقة الحركية فنكتب:

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1^{'} + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow m_1v_1^{'} = m_1v_1 - m_2v_2 \rightarrow (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow m_1v_1^{'2} = m_1v_1^2 - m_2v_2^2 \rightarrow (2)$$

نحذف المجهول $v_1^{'}$ ما بين المعادلتين (1) و (2) بتربع الأولى و ضرب الثانية في m_1 ثم نستنتج السرعة v_2:

$$(1)^2 \Rightarrow m_1^2v_1^{'2} = m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 - 2m_1m_2v_1v_2 \rightarrow (3)$$

$$(2)m_1 \Rightarrow\rightarrow m_1^2v_1^{'2} = m_1^2v_1^2 - m_1m_2v_2^2\,(4)$$

$$(3) = (4) \Rightarrow m_2^2v_2^2 - 2m_1m_2v_1v_2 = m_1m_2v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}}$$

الصدم الثاني:

لتكن $\vec{v}_2$ سرعة m_2 المكتسبة بعد الصدم الأول، حينما الكرة m_3 في حالة سكون. بعد الصدم الثاني تصبح للكرة m_2 السرعة $\vec{v}_2^{'}$، بينما $\vec{v}_3$ السرعة التي اكتسبتها الكرة m_3. نطبق مبدأي انحفاظ كمية الحركة و الطاقة الحركية فنكتب:

$$m_2\vec{v}_2 = m_2\vec{v}_2^{'} + m_3\vec{v}_3 \Rightarrow m_2v_2^{'} = m_2v_2 - m_3v_3 \rightarrow (5)$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^{'2} + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \Rightarrow m_2v_2^{'2} = m_2v_2^2 - m_3v_3^2 \rightarrow (6)$$

نحذف المجهول $v_2^{'}$ ما بين المعادلتين (5) و (6) بتربع الأولى و ضرب الثانية في m_2 ثم نستنتج السرعة v_3:

$$(5)^2 \Rightarrow m_2^2 v_2'^2 = m_2^2 v_2^2 + m_3^2 v_3^2 - 2m_2 m_3 v_2 v_3 \rightarrow (7)$$

$$(6) m_2 \Rightarrow\rightarrow m_2^2 v_2'^2 = m_2^2 v_2^2 - m_2 m_3 v_3^2 \rightarrow (8)$$

$$(7) = (8) \Rightarrow m_3^2 v_3^2 - 2m_2 m_3 v_2 v_3 = m_2 m_3 v_3^2 \Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{2m_2 v_2}{m_2 + m_3}}$$

نعوض v_2 بقيمتها الموجودة سابقا لنحصل على:

$$\boxed{v_3 = \frac{4m_1 m_2 v_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}} \rightarrow (9)$$

نفهم من النص أن المقادير v_1, m_1, m_3 ثوابت في حين v_3 متغيرة لأنها تابعة للكتلة m_2 التي يجب أن نحدد قيمتها حتى تكون v_3 أعظمية. تتحول المسألة إلى الدالة الرياضية $v_3 = f(m_2)$ التي يجب اشتقاقها و من ثمة البحث عن قيمة m_2 التي من أجلها تنعدم مشتقة v_3 بالنسبة للمتغير m_2.

للتبسيط نضع الرموز $v_3 = y$, $m_2 = x$ و نكتب المعادلة (9) على الشكل:

$$\boxed{y = \frac{4m_1 v_1 x}{(m_1 + x)(x + m_3)}}$$

نشتق المعادلة $y = f(x)$ فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = 4m_1 v_1 \frac{(m_1 + x)(x + m_3) - x\left[(m_1 + x) + (x + m_3)\right]}{(m_1 + x)^2 (x + m_3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4m_1 v_1 \frac{m_1 m_3 - x^2}{(m_1 + x)^2 (x + m_3)^2}$$

y تبلغ قيمتها الأعظمية لما $\frac{dy}{dt} = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow m_1 m_3 - x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = m_2 = \sqrt{m_1 m_3}}$$

هذه قيمة الكتلة m_2 لكي تكتسب الكرة m_3 سرعة أعظمية $v_{,\max}$ بعد أن تصدمها الكرة m_2. أما عبارة السرعة الأعظمية فنحصل عليها بتعويض m_2 في المعادلة (9):

$$\boxed{v_{,\max} = \frac{4m_1 \sqrt{m_1 m_3}\, v_1}{\left(m_1 + \sqrt{m_1 m_3}\right)\left(\sqrt{m_1 m_3} + m_3\right)}}$$

تمرين 11.6:

1/ قوة الاحتكاك على القطعة المستقيمة AB : $\left.\begin{array}{l} f = \mu N \\ N = mg\cos\alpha \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f = \mu mg\cos\alpha}$, $\boxed{f = 4{,}9N}$

2/ لحساب السرعة المكتسبة من طرف الجسم في النقطة B نطبق نظرية الطاقة الحركية:

$$\Delta E_c = \sum W_i$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = mga\sin\alpha - fa \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2a\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}} \;,\; \boxed{v_B = 3,88m.s^{-1}}$$

بنفس الطريقة نحسب السرعة v مع إهمال الاحتكاكات في الجزء BC من المسلك:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = mg\left(2a - l_0\right)\sin\alpha \Rightarrow \boxed{v = \left[g\left(2a - l_0\right)\sin\alpha + \frac{1}{2}v_B^2\right]^{1/2}} \;,\; \boxed{v \approx 4,6m.s^{-1}}$$

3/ كل الطاقة الحركية المكتسبة من قبل الجسم حتى وصوله النابض تتحول إلى طاقة كامنة مرونية في النابض:

$$\Delta E_c = \Delta E_p \;,\; \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{x = v\sqrt{\frac{m}{k}}} \;,\; \boxed{x = 14,5cm}$$

4/ هنا العكس يحدث: كل الطاقة الكامنة التي خزّنها النابض خلال انضغاطه ستتحول من جديد إلى طاقة حركية بحيث ينطلق الجسم بسرعة مساوية لتلك التي صدم بها النابض كما نتحقق من ذلك:

$$\Delta E_p = \Delta E_c \;,\; \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = x\sqrt{\frac{k}{m}}} \;,\; \boxed{v = 4,58ms^{-1}}$$

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية نحسب المسافة d التي يصعدها الجسم بعد مغادرته النابض:

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -mgd\sin\alpha \Rightarrow \boxed{d = \frac{v^2}{2g\sin\alpha}} \;,\; \boxed{d \approx 1,23m}$$

تمرين 12.6:

1/ نعتبر المستوى الأفقي المار من مركز الكرة مرجع للطاقة الكامنة $\left(E_{p,O} = 0\right)$.

الطاقة الكامنة في النقطة M_0:

$$\left.\begin{aligned} E_{M_0} &= mgh_0 \\ h_0 &= mg\cos\alpha \end{aligned}\right| \Rightarrow E_{M_0} = mgR\cos\alpha$$

الطاقة الكامنة في النقطة M:

$$\left.\begin{aligned} E_M &= mgh + \frac{1}{2}mv^2 \\ h &= R\cos\theta \\ v &= \dot\theta R \end{aligned}\right| \Rightarrow E_M = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot\theta^2 R^2$$

بتطبيق مبدإ انحفاظ الطاقة الميكانيكية نستنتج السرعة الزاوية $\dot\theta$:

$$E_{M_0} = E_M \Rightarrow mgR\cos\alpha = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot\theta^2 R^2$$

$$\boxed{\dot\theta = \frac{2g}{R}\left(\cos\alpha - \cos\theta\right)}$$

2/ لحساب رد الفعل نحصي القوى و نمثلها ثم نسقطها على المحور الناظمي و نعوض السرعة الزاوية بقيمتها التي وجدناها في السؤال الأول، فنكتب:

$$\left.\begin{array}{l} R-P\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=ma_N \\ a_N=\dot{\theta}^2 R \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N=mg\left(3\cos\theta-2\cos\alpha\right)}$$

3/ تغادر النقطة المادية سطح الكرة لما ينعدم رد الفعل من أجل زاوية معينة نقترح حسابها:

$$N=0\Rightarrow\cos\theta_0=\frac{2}{3}\Rightarrow\boxed{\theta_0\approx 48°}$$

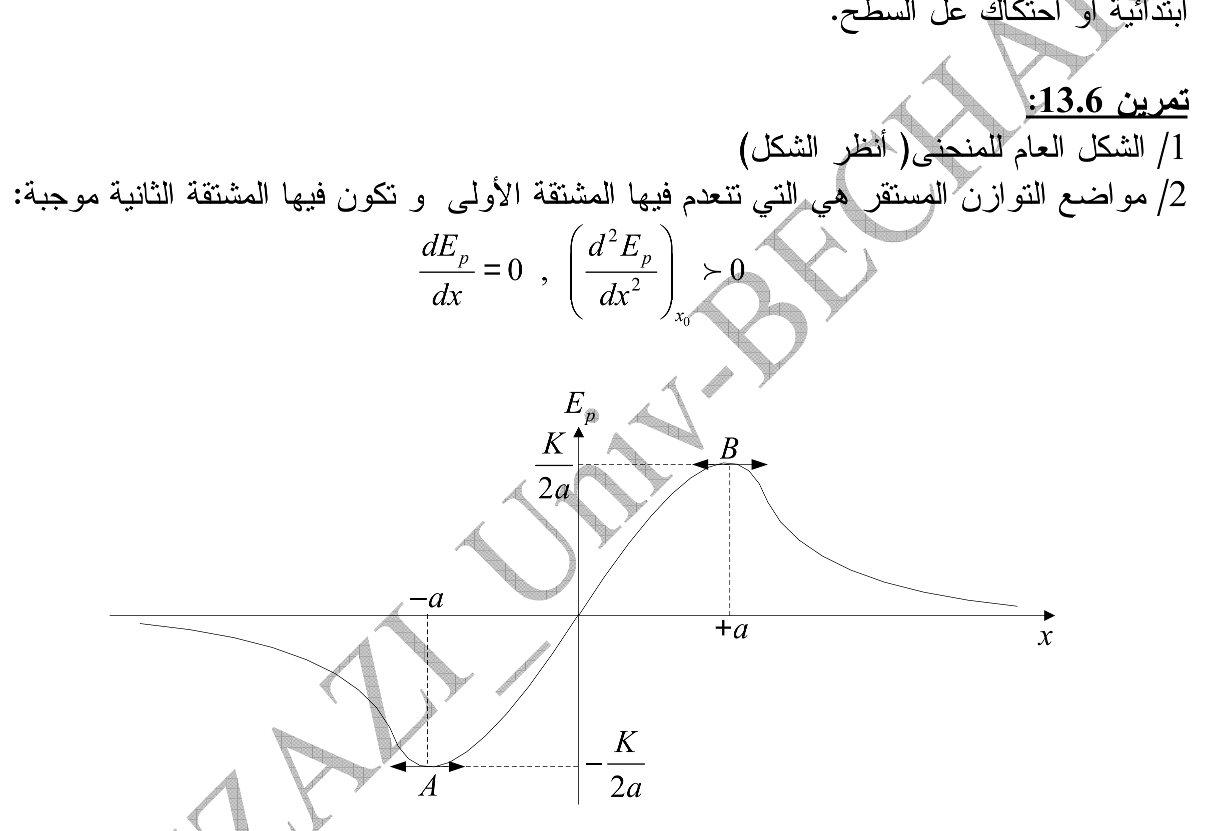
<u>المناقشة:</u> زاوية المغادرة مستقلة عن قطر الكرة و كتلتها. غير أن هذه النتيجة تتغير بوجود سرعة ابتدائية أو احتكاك عل السطح.

<u>تمرين 13.6:</u>

1/ الشكل العام للمنحنى(أنظر الشكل)

2/ مواضع التوازن المستقر هي التي تنعدم فيها المشتقة الأولى و تكون فيها المشتقة الثانية موجبة:

$$\frac{dE_p}{dx}=0\ ,\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0}\succ 0$$



مواضع التوازن الغير مستقر هي التي تنعدم فيها المشتقة الأولى و تكون فيها المشتقة الثانية سالبة:

$$\frac{dE_p}{dx}=0\ ,\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0}\prec 0$$

باشتقاق E_p بالنسبة للمتغير x مرتين متتاليتين نحصل على النتائج التالية:

$$\frac{dE_p}{dx}=K\frac{a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=0\Leftrightarrow x=\pm a$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}=2Kx\frac{\left(x^2-3a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^3}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=+a}\prec 0\\ \left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=-a}\succ 0\end{array}\right.$$

نلاحظ أن موضع التوازن المستقر هو (A) الذي فاصلته $x=-a$ ، أما موضع التوازن الغير المستقر فهو (B) الذي فاصلته $x=+a$.

تمرين 14.6:

1. ا/ نلاحظ من شكل النص أن:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{OO'}=a\vec{u}_x\\ \overrightarrow{OP}=a\vec{u}_r\end{array}\right|\Rightarrow \overrightarrow{O'P}==a\left(\vec{u}_x+\vec{u}_r\right)$$

نعبر عن شعاع الواحدة $\vec{u}_x$ بدلالة $\vec{u}$ و $\vec{u}_\theta$ لنحصل على العبارة المطلوبة:

$$\vec{u}_x=\cos\theta.\vec{u}_r-\sin\theta.\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O'P}=a\left(1+\cos\theta\right).\vec{u}_r-a\sin\theta.\vec{u}_\theta}$$

طويلة هذا الشعاع هي إذن:

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{\left[a\left(1+\cos\theta\right)\right]^2+\left[a\sin\theta\right]^2}\\ \left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=\sqrt{2a^2\left(1+\cos\theta\right)}\\ 1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|=2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

ب/ الكرية خاضعة لقوة **إرجاع** عبارتها $\vec{T}=-k\left(l-l_0\right)\vec{u}$ ، حيث $l=\left\|\overrightarrow{O'P}\right\|$ و $\vec{u}$ شعاع الواحدة وفق منحى $\overrightarrow{O'P}$. يمكن تحليل الشعاع $\vec{u}$ إلى مركبتين $\vec{u}=\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r-\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta$. و عليه فإن توتر الخيط المطاطي هو: $\boxed{\vec{T}=-k\left[\left(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r-\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)\right]}$

2. ا/ شعاع السرعة معرف بالعبارة: $\vec{v}=\underbrace{\dot{a}\vec{u}_r}_{0}+a\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{v}=a\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$

ب/ القوة $\vec{F}$ هي محصلة ثلاث قوى: الثقل $\vec{P}$ التوتر $\vec{T}$ ورد الفعل $\vec{R}$: $\vec{F}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}$

$$\wp=\vec{F}.\vec{v}=\left(\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}\right)\vec{v}$$

$$\vec{P}\vec{v}=\left(mg\cos\theta\vec{u}_r-mg\sin\theta\vec{u}_\theta\right)a\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{P}\vec{v}=-a\dot{\theta}mg\sin\theta$$

$$\vec{T}\vec{v}=-k\left[\left(2a\cos\frac{\theta}{2}-l_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r-\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)\right]a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = \left[-k2a\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r + k2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta + kl_0\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right]a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{T}\vec{v} = a\dot{\theta}2ka\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}_{\frac{1}{2}\sin\theta} - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \vec{T}\vec{v} = a^2\dot{\theta}k\frac{1}{2}\sin\theta - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\vec{R}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{R}\vec{v} = 0$$

$$\wp = \vec{F}.\vec{v} = \left(\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}\right)\vec{v} \Rightarrow \wp = -a\dot{\theta}mg\sin\theta + a^2\dot{\theta}k\sin\theta - a\dot{\theta}kl_0\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\boxed{\wp = a\dot{\theta}\left[\left(ka-mg\right)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]}$$

ج/ من الاستطاعة نستنتج العمل العنصري ثم نكامله لنحصل على عبارة الطاقة الكامنة:

$$\left.\begin{array}{l} dW = \wp\, dt \\ dE_p = -dW \\ \wp = a\dot{\theta}\left[\left(ka-mg\right)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right] \end{array}\right| \Rightarrow dE_p = -\left[\left(ka-mg\right)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]a\underbrace{\dot{\theta}dt}_{d\theta}$$

$$E_p = -a\int\left[\left(ka-mg\right)\sin\theta - kl_0\sin\frac{\theta}{2}\right]d\theta$$

$$\boxed{E_p = a\left[\left(ka-mg\right)\cos\theta - 2kl_0\cos\frac{\theta}{2}\right] + C^{te}}$$

3. ا/ لإيجاد مواضع التوازن نبحث عن قيم θ التي تنعدم من أجلها المشتقة الأولى للطاقة الكامنة:
نعوض أولا a و l_0 الموجودتين داخل القوس بقيمتيهما المعطاتين في عبارة E_p:

$$\boxed{E_p = mga\left[\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

نشتق العبارة الأخيرة بالنسبة لـــ θ، ثم نقوم بتحويل مثلثي ملائم فينتج لدينا:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dE_p}{d\theta} = mga\left[-\sin\theta + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\right] \\ \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{dE_p}{d\theta} = mga\sin\frac{\theta}{2}\left[\sqrt{3} - 2\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

نستنتج القيمتين لـــ θ اللتين تنعدم من أجلهما المشتقة الأولى فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dE_p}{d\theta} = 0 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{\theta_1 = 0} \\ \boxed{\theta_2 = \pi/3} \end{array}$$

ب/ نفهم من السؤال تعيين مواضع التوازن المستقر و التوازن الغير مستقر. من أجل هذا نبحث عن إشارة المشتقة الثانية للطاقة الكامنة عند القيمتين θ_1 و θ_2:

$$\boxed{\frac{d^2E_p}{d\theta}=mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}-1\right)}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}(\theta_1=0)=mga\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\prec 0$$ تــوازن غــير مســتقر

$$\frac{d^2E_p}{d\theta}(\theta_2=\pi/3)=\frac{mga}{2}\succ 0$$ تــوازن مســتقر

تمرين 15.6:

1/ نحسب أولا السرعة v_0 للكرية B_1 قبل الاصطدام مباشرة مع الكرية B_2، و ذلك بتطبيق نظرية الطاقة الحركية (h_0 الارتفاع الذي تركت منه الكرية B_1): $\Delta E_c=\sum W_i$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}m_1v_0^2=m_1gh_0\\ h_0=l(1-\cos\alpha_0)\end{array}\right|\Rightarrow \boxed{v_0=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$$

ا/ **الإصطدام المرن:**

نفترض أن كمية الحركة والطاقة الحركية محفوظتان حتى يتسنى لنا كتابة المعادلتين التاليتين اللتين نقسمهما طرف لطرف فنحصل على:

$$m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2\rightarrow(1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\Rightarrow m_1v_0^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2\rightarrow(2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}\Rightarrow v_2=v_0+v_1\rightarrow(3)$$

نعوض v_2 و v_0 في المعادلة (1) علما أن $x=\frac{m_1}{m_2}$ ثم نستنتج السرعة v_1، فيأتي:

$$\boxed{v_1=\frac{x-1}{x+1}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$$

نعوض v_0 و v_1 في المعادلة (1) ثم نستنتج السرعة v_2، فيأتي:

$$\boxed{v_2=\frac{2x}{x+1}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}}$$

نطبق من جديد نظرية الطاقة الحركية على كل من الكريتين لنجد زاويتي انحرافهما:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}m_1v_1^2=m_1gh_1\\ h_1=l(1-\cos\alpha_1)\\ v_1=\frac{x-1}{x+1}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}\end{array}\right|\Rightarrow m_1gl(1-\cos\alpha_1)=\frac{1}{2}m_1\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2 2gl(1-\cos\alpha_0)$$

$$\boxed{\cos\alpha_1=1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2(1-\cos\alpha_0)}\rightarrow(4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}m_2v_2^2=m_2gh_2\\ h_2=l\left(1-\cos\alpha_2\right)\\ v_2=\frac{2x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)}\end{array}\right|\Rightarrow m_2gl\left(1-\cos\alpha_2\right)=\frac{1}{2}m_2\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2 2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$\boxed{\cos\alpha_2=1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)}\rightarrow(5)$$

المناقشة:

$x\succ 1\Rightarrow\left|\begin{array}{l}v_1\succ 0\\ v_2\succ 0\end{array}\right.$: الكريّتان تصعدان في نفس الاتجاه بعد الصدم حيث تكون سرعة A_1 أصغر من سرعة A_2 .

$x=1\Rightarrow\left|\begin{array}{l}v_1=0\\ v_2=v_0\end{array}\right.$:الكرية A_1 تتوقف بعد الصدم لتحول كل طاقتها إلى الكرية A_2 التي تنطلق بالسرعة v_0 .

$x\prec 1\Rightarrow\left|\begin{array}{l}v_1\prec 0\\ v_2\prec 0\end{array}\right.$: الكريتان تصعدان في اتجاهين متعاكسين بحيث الكرية A_1 تعود أدراجها و الكرية A_2 تتحرك في الاتجاه المعاكس.

ب/ **الإصطدام اللين:**

كمية الحركة محفوظة، سرعة الكرتين ملتصقتين مباشرة بعد الصدم هي:

$$m_1v_0=\left(m_1+m_2\right)v\Rightarrow\boxed{v=\frac{x}{x+1}\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha_0\right)}}\rightarrow(6)$$

نطبق على الجملة نظرية الطاقة الحركية لنجد:

$$\Delta E_c=\sum W_i$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v^2=\left(m_1+m_2\right)gh\\ h=l\left(1-\cos\alpha\right)\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{v=\sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)}}\rightarrow(7)$$

مساواة المعادلتين (6) و (7) تعطينا زاوية الانحراف α في حالة الصدم اللين:

$$\boxed{\cos\alpha=1-\left[\frac{x}{x-1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)}$$

2/ **التطبيق العددي:**

ا/ قيمة x من أجل زاويتي انحراف متساويتين: لإيجاد قيمة x لكي تنحرف الكريتين في اتجاهين متعاكسين بنفس الزاوي نساوي بين المعادلتين (4) و (5):

$$\cos\alpha_1=\cos\alpha_2\Rightarrow 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)=1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)$$

$$3x^2+2x-1=0\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x_1=-1\\ x_2=1/3\end{array}\right.$$

الحل الموجب هو الوحيد القبول أي $\boxed{x=x_2=1/3}$ ، و الزاوية المناسبة α' هي:

$$\cos\alpha' = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right),\quad \cos\alpha' = 0,875 \Rightarrow \boxed{\alpha' = 29°}$$

ب/ زاويتا الانحراف من أجل $x = 2$:

في حالة الصدم المرن: نعوض في المعادلة (4):

$$\cos\alpha_{1_{x=2}} = 1-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right),\quad \cos\alpha_{1_{x=2}} = 0,94 \Rightarrow \boxed{\alpha_{1_{x=2}} \approx 20°}$$

في حالة الصدم اللين: نعوض في المعادلة (5):

$$\cos\alpha_{2_{x=2}} = 1-\left[\frac{2x}{x+1}\right]^2\left(1-\cos\alpha_0\right)\cos\alpha_{2_{x=2}} = 0,11 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{2_{x=2}} = 83,7°}$$